[This question paper contains 8 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 1574 **L**

Unique Paper Code : 2272101202

Name of the Paper : Intermediate Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : **Discipline Specific Core (DSC - Economics)**

Semester : II – NEP-UGCF

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

समय : 3 घण्टे पूर्णांक : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any **six** questions.
3. **All** questions carry equal marks.
4. Marks of individual parts of each question are specified with the question.
5. Use of calculators is permitted.
6. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. किन्हीं **छह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं ।
4. प्रत्येक प्रश्न के अलग-अलग भागों के अंक प्रश्न के साथ दिए गए हैं ।
5. कैलकुलेटर का प्रयोग अनुमत है ।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

P.T.O.

1. (a) (i) Define the rank of a matrix.

(ii) Find the rank of the following matrix for various values of p and q:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) The equation $g(x^2y) = 10$ implicitly represents y as a function of x. Calculate the first and second derivatives of y with respect to x.

(c) Let $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ be defined on the domain D, a triangular region in the first quadrant bounded by the lines $x = 0$, $y = 0$ and $y = 9 - x$.
(i) Draw the domain D of $f(x, y)$.
(ii) Is the set closed, bounded, compact and convex? Give reasons for each.
(iii) Find the absolute maximum and minimum values of the function $f(x, y)$ over the domain D.

[5, 5, 5 marks]

2. (a) If **P** is an $n \times n$ matrix whose column vectors are all of length 1 and are mutually orthogonal, then prove that **P** is an orthogonal matrix.

(b) The function $z = f(x, y)$ is homogeneous of degree k.
(i) Check if the functions $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ are homogeneous
(ii) Find the degree of homogeneity for the function $\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$.

(c) Consider a competitive firm with the production function $Q = f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}$ where Q is output, L is labour, and K is capital. Suppose the price of the product is *p, the* wage rate is *w,* and the rental rate of capital is *r*. Find the profit-maximising labour and capital for the firm. Check the second-order sufficient conditions.

[5, 5, 5 marks]

3. (a) Consider the three vectors $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. Can b be expressed as a linear combination of the set $\{a_1, a_2\}$?

(b) Demand functions for two commodities *X* and *Y* are:
$x = p_x . p_y$ and $y = 10 + 2p_x - p_y$, where *x* and *y* are quantities and p_x *and* p_y are prices of the two goods.
(i) Calculate the partial elasticities of demand for the two commodities with respect to the price of the other commodity.
(ii) Determine whether the two commodities are complementary goods.

(c) Classify the stationary points of the function $f(x, y, z, u) = 20\,y + 48\,z + 6\,u + 8\,xy - 4\,x^2 - 12z^2 - u^4 - 4y^3$

[5, 5, 5 marks]

4. (a) Let $\Lambda = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ such that } xy \geq 0\right\}$ denote the union of the first and third quadrants in the xy-plane.
(i) If u is a vector in Λ and λ is any scalar, is λu in Λ ?
(ii) Provide an example of two vectors u and v in Λ such that $u + v$ is not in Λ.

(b) Consider the following system of two equations:
$x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, and $2x - y + z - 4 = 0$
What conditions are required so that y and z can be expressed as functions of x near a point $P = (x_0, y_0, z_0)$ that satisfies the two equations?

(c) Graph the following sets in the X-Y plane and comment whether they are convex.
(i) $S = \{(x, y): y \leq ln\,(x) - x\}$
(ii) $S' = \{(x, y): x \geq 2, y \leq 4\}$

[5, 5, 5 marks]

5. (a) For the following system of linear equations, answer the questions that follow:

$(q - 1)x + py = 0$
$(1 - q)x - py = 0$
$x + y = 1$

If p and q lie between 0 and 1, how many solutions does this system have, and why?

Ignoring the condition that p *and* q lie between 0 and 1, find values of p *and* q so that this system has no solution.

(b) A utility function is given by the function $U = f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{x - y}$. Calculate the elasticity of substitution of y for x.

(c) Let U be a function of many variables defined on a convex set S and let g be a function of a single variable defined on a set that contains the range of U. Suppose that U is quasi-concave and g is non-decreasing. Show that the function f defined on S given by $f(x) = g(U(x))$ is quasi-concave.

[5, 5, 5 marks]

6. (a) Let a 3×3 matrix A has eigenvalues equal to 2,3 and 5. Is the matrix invertible? Explain. If it is invertible, find the eigenvalues of A^{-1}.

   (b) Let the function g be given by: $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2 e^{x_1 + 3x_2}$
   (i) Find the level curves $g(x_1, x_2) = 0$. Where is $g(x_1, x_2) > 0$?
   (ii) Find and classify the stationary points.
   (iii) Discuss whether $g(x, y)$ has global extreme points.

[5, 10 marks]

7. (a) (i) Find the eigenvalues and the associated eigenvectors of matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (ii) Show that matrix A is diagonalizable and find the matrix P so that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

   (b) Calculate the definiteness of the quadratic form $f(x, y, z) = -5x^2 - 4y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

[10, 5 marks]

1. (a)

(i) एक मैट्रिक्स की रैंक को परिभाषित कीजिए।

(ii) p और q के विभिन्न मानों के लिए निम्नलिखित मैट्रिक्स की रैंक ज्ञात कीजिए:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) समीकरण $g(x^2y) = 10$ अप्रत्यक्ष रूप से y को x के फलन के रूप में निरूपित करता है। x के सापेक्ष y के प्रथम और द्वितीय अवकलन ज्ञात कीजिए।

c) मान लीजिए $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ को डोमेन D पर परिभाषित किया गया है, जो प्रथम चतुर्थांश में स्थित एक त्रिभुजाकार क्षेत्र है और रेखाओं x=0, y=0 और y=9-x द्वारा परिबद्ध है।

(i) f(x,y) का डोमेन D बनाइए।

(ii) क्या यह समुच्चय संवरित, परिबद्ध, संकुचित और उत्तल है? प्रत्येक के लिए कारण बताइए।

(iii) डोमेन D पर फलन f(x,y) के निरपेक्ष अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। [5, 5, 5 अंक]

2. (a) यदि P एक n×n मैट्रिक्स है जिसके सभी स्तंभ सदिशों की लंबाई 1 है और वे परस्पर लंबवत हैं, तो सिद्ध कीजिए कि P एक लंबवत मैट्रिक्स है।

(b) फलन z=f(x,y) k घात का समरूप मैट्रिक्स है।

(i) जाँच कीजिए कि क्या फलन $\partial z/\partial x$ और $(\partial^2 z)/\partial x \partial y$ समरूप हैं।

(ii) फलन $(\partial z/\partial x)/(\partial z/\partial y)$ के लिए समरूपता की घात ज्ञात कीजिए।

(c) एक प्रतिस्पर्धी फर्म पर विचार कीजिए जिसका उत्पादन फलन $Q=f(K,L)= L^{1/2} + K^{1/2}$ है, जहाँ Q उत्पादन है, L श्रम है और K पूंजी है। मान लीजिए उत्पाद का मूल्य p है, मजदूरी दर w है और पूंजी का किराया r है। फर्म के लिए लाभ को अधिकतम करने वाले श्रम और पूंजी ज्ञात कीजिए। द्वितीय-कोटि की पर्याप्त शर्तों की जाँच कीजिए। [5, 5, 5 अंक]

3. (a) तीन सदिश $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$. पर विचार करें। क्या b को समुच्चय {a_1, a_2} के रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

(b) दो वस्तुओं X और Y के लिए मांग फलन इस प्रकार हैं:

x=p_x.p_y और y= 〖10+2p〗 _x-p_y, जहाँ x और y मात्राएँ हैं तथा p_x और p_y दो वस्तुओं के मूल्य हैं।

(i) दूसरी वस्तु के मूल्य के सापेक्ष दोनों वस्तुओं की मांग की आंशिक लोच की गणना कीजिए।

(ii) निर्धारित कीजिए कि क्या दोनों वस्तुएँ पूरक वस्तुएँ हैं।

(c) फलन $f(x, y, z, u) = 20\,y + 48\,z + 6\,u + 8\,xy - 4\,x^2 - 12z^2 - u^4 - 4y^3$

के स्थिर बिंदुओं का वर्गीकरण कीजिए। [5, 5, 5 अंक]

4. (a) मान लीजिए $\Lambda = \left\{\binom{x}{y}\right\}$ इस प्रकार कि xy≥0} xy-तल के प्रथम और तृतीय चतुर्थांशों का संघ है।

(i) यदि u, Λ में एक सदिश है और λ कोई अदिश राशि है, तो क्या λu, Λ में है?

(ii) Λ में दो सदिश u और v का एक उदाहरण दीजिए, इस प्रकार कि u+v, Λ में न हो।

(b) निम्नलिखित दो समीकरणों के तंत्र पर विचार करें:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, \text{ और } 2x - y + z - 4 = 0$$

ऐसे बिंदु $P = (x_0, y_0, z_0)$ के निकट y और z को x के फलन के रूप में व्यक्त करने के लिए क्या शर्तें आवश्यक हैं जो इन दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है?

(c) निम्नलिखित समुच्चयों का X-Y तल पर ग्राफ बनाएँ और बताएँ कि क्या वे उत्तल हैं।

(i) $S = \{(x,y): y \leq \ln(x) - x\}$

(ii) $S' = \{(x,y): x \geq 2, y \leq 4\}$ [5, 5, 5 अंक]

5. (a) निम्नलिखित रैखिक समीकरणों के तंत्र के लिए, निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

$$(q-1)x+py=0$$

$$(1-q)x-py=0$$

$$x+y=1$$

यदि p और q, 0 और 1 के बीच स्थित हैं, तो इस तंत्र के कितने हल हैं, और क्यों?

p और q के 0 और 1 के बीच स्थित होने की शर्त को अनदेखा करते हुए, p और q के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए इस तंत्र का कोई हल न हो।

(b) एक उपयोगिता फलन U=f(x,y)=(x^2+xy)/(x-y) द्वारा दिया गया है। x के स्थान पर y के प्रतिस्थापन की प्रत्यास्थता की गणना कीजिए।

(c) मान लीजिए U एक उत्तल समुच्चय S पर परिभाषित एक बहु-चर फलन है और g एक ऐसे समुच्चय पर परिभाषित एक चर फलन है जिसमें U का परिक्रमण क्षेत्र शामिल है। मान लीजिए कि U अर्ध-अवतल है और g अघटता फलन है। सिद्ध कीजिए कि S पर परिभाषित फलन f, जो f(x) = g(U(x)) द्वारा दिया गया है, अर्ध-अवतल है।

[5, 5, 5 अंक]

6. (a) मान लीजिए एक 3×3 आव्यूह A के आइगेनमान 2, 3 और 5 हैं। क्या यह आव्यूह व्युत्क्रमणीय है? व्याख्या कीजिए। यदि यह व्युत्क्रमणीय है, तो A^{-1}. के आइगेनमान ज्ञात कीजिए।

(b) मान लीजिए फलन g इस प्रकार दिया गया है: $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 x_2 e^{x_1 + 3x_2}$

(i) स्तर वक्र $g(x_1, x_2) = 0$. ज्ञात कीजिए। $g(x_1, x_2) > 0$? कहाँ है?

(ii) स्थिर बिंदुओं को ज्ञात कीजिए और उनका वर्गीकरण कीजिए।

(iii) चर्चा कीजिए कि क्या g(x,y) के वैश्विक चरम बिंदु हैं। [5, 10 अंक]

7. (a)

(i) मैट्रिक्स A के आइगेनवैल्यू और संबंधित आइगेनवेक्टर ज्ञात कीजिए।

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) दर्शाइए कि मैट्रिक्स A विकर्णीय है और मैट्रिक्स P ज्ञात कीजिए ताकि $P^{-1}AP$ एक विकर्ण मैट्रिक्स हो।

(b) द्विघात रूप $f(x, y, z) = -5x^2 - 4y^2 - 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$ की निश्चितता ज्ञात कीजिए।

[10, 5 अंक]