(This question paper contains **8** printed pages)

Roll Number: ……

Serial Number of question paper : **5574**

Unique Paper Code : 2274000016

Name of the Paper : Game Theory and Social Sciences

Name of the Course : General Elective (GE)

Semester : IV/VI/VIII

Duration : 3 hours **Maximum Marks : 90 Marks**

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any five questions.
3. Answers may be written either in English or Hindi but the same medium should be used throughout the paper.
4. Use of a simple calculator is allowed.

1. (a) Consider the following normal-forma game:

		Player B		
		L	C	R
Player A	U	(6,4)	(5, 3)	(4, 2)
	M	(3, 2)	(2, 2)	(1, 1)
	D	(5, 3)	(4, 1)	(3, 0)

Explain how dominance solvability helps in reducing the complexity of strategic games. What conclusion can you draw about the equilibrium outcome of this game after applying IESDS? (6 marks)

(b) Two firms, Firm 1 and Firm 2, compete in quantities in a homogeneous product market à la Cournot Competition. The inverse market demand function is given by: $P = 120 - Q$ where $Q = q_1 + q_2$, and q_1, q_2 denote outputs of Firm 1 and Firm 2 respectively. The cost functions of the firms are: $C_1(q_1) = 10q_1, C_2(q_2) = 20q_2$

(i) Derive the profit functions for both firms. (2 marks)

(ii) Derive the best response functions of Firm 1 and Firm 2. (4 marks)

(iii) Solve for the equilibrium quantities q_1^* and q_2^* . (2 marks)

(iv) Determine the equilibrium price and profits of both firms.(3 marks)

(v) Explain how cost asymmetry affects equilibrium output and profits. (1 marks)

2. (a) In a second-price auction with bidders having valuations ₹150, ₹175, and ₹190, find:
(i) Each bidder's equilibrium bid. (3)
(ii) Winner and price paid. (2)
(iii) When would an auction designer prefer first price auction over second price auction in such a situation? (4 marks)

(b) Solve for the mixed strategy Nash equilibrium and expected payoff for each player in the following game. The first entry in a pay-off vector is row player's pay-off. (9 marks)

		Player B	
		C	D
Player A	X	(4,2)	(0,3)
	Y	(2,4)	(3,1)

3. (a) What is a strictly competitive game? Consider the following normal form game and computer the mixed strategy Nash equilibrium. (9 marks)

		Player B	
		C	D
Player A	X	(4,-4)	(0,0)
	Y	(2,-2)	(3,-3)

(b) Consider the following normal-form game:

		Player B		
		L	C	R
Player A	U	(5, 3)	(4, 2)	(3, 1)
	M	(4,)	(3, 2)	(2, 1)
	D	(3, 4)	(2, 3)	(1, 2)

Define the concepts of strictly dominated and weakly dominated strategies and identify dominated strategies, if any, for both the players. (9 marks)

4. Consider the following normal-form game:
Player 1 (Aarav) and Player 2 (Bhavna) each choose between two actions: Invest (I) or Not Invest (N).
Payoffs are given as (Aarav, Bhavna):

		Bhavna	
		Invest	Not Invest
Aarav	Invest	(y,y)	(1,3)
	Not Invest	(3,1)	(2,2)

(a) For what values of y does this game have a unique Nash equilibrium? Identify the equilibrium for those values.
(4 marks)

(b) For what values of y does this game have a mixed-strategy Nash equilibrium? Compute the probability (in terms of y) with which each player chooses Invest (I) in the mixed-strategy equilibrium. (8 marks)

(c) Let y=5. Derive and graph the best response functions of both players, and use them to identify all Nash equilibria (pure and mixed). (6 marks)

5. Consider a two-player sequential game with symmetric information in which Player 1 moves first by choosing an action $\alpha \in \{A, B\}$, after which Player 2 observes Player 1's choice and selects an action $\beta \in \{X, Y\}$. The resulting payoffs (Player 1, Player 2) are as follows: if Player 1 chooses A, then Player 2 choosing X yields (5, 1) and choosing Y yields (2, 4); if Player 1 chooses B, then Player 2 choosing X yields (3, 3) and choosing Y yields (4, 2).

   (a) Represent the game in extensive form. (6 marks)

   (b) Determine Player 2's optimal strategy using backward induction, identify Player 1's optimal choice anticipating Player 2's response, and find the Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE) of the game. (8 marks)

   (c) Compare the outcome in part (b) with the equilibrium of the simultaneous-move version of the same game and comment on whether the equilibrium outcome changes. (4 marks)

6. (a) Two players are engaged in a war of attrition. The prize is worth ₹10. Each player can choose to quit or stay. Each second a player stays in the game, they incur a cost of ₹1. Model this as a game and identify the equilibrium. Discuss any assumptions made.

   (b) Two political parties are facing a unit mass of voters who are uniformly distributed over a policy position, say the level of provision of a public good. Which policy positions will the parties choose in a Nash equilibrium? Explain using a diagram.

   (9 marks)

7. (क) निम्नलिखित सामान्य-रूप खेल पर विचार कीजिए:

		खिलाड़ी B		
		L	C	R
खिलाड़ी A	U	(6,4)	(5, 3)	(4, 2)
	M	(3, 2)	(2, 2)	(1, 1)
	D	(5, 3)	(4, 1)	(3, 0)

रणनीतिक खेलों की जटिलता को कम करने में प्रभुत्व द्वारा समाधान किस प्रकार सहायक होता है?आईईएसडीएस लागू करने के बाद इस खेल के संतुलन परिणाम के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं? (6 अंक)

(ख) दो फर्में, फर्म 1 और फर्म 2, एक समरूप उत्पाद बाजार में कूर्नो प्रतिस्पर्धा के अनुसार मात्राओं में प्रतिस्पर्धा करती हैं। व्युत्क्रम बाजार माँग फलन निम्न प्रकार दिया गया है: $P = 120 - Q$ जहाँ $Q = q_1 + q_2$, तथा q_1, q_2 क्रमशः फर्म 1 और फर्म 2 के उत्पादन मात्राओं को दर्शाते हैं। फर्मों के लागत फलन निम्न हैं: $C_1(q_1) = 10q_1, C_2(q_2) = 20q_2$

(vi) दोनों फर्मों के लाभ फलन व्युत्पन्न कीजिए। (2 अंक)

(vii) फर्म 1 और फर्म 2 के सर्वोत्तम प्रतिक्रिया फलन व्युत्पन्न कीजिए। (4 अंक)

(viii) संतुलन उत्पादन मात्राएँ q_1^* और q_2^* ज्ञात कीजिए। (2 अंक)

(ix) संतुलन मूल्य तथा दोनों फर्मों के लाभ ज्ञात कीजिए। (3 अंक)

(x) स्पष्ट कीजिए कि लागत विषमता संतुलन उत्पादन और लाभ को किस प्रकार प्रभावित करती है। (1 अंक)

8. (क) एक द्वितीय-मूल्य नीलामी में बोली लगाने वालों के मूल्यांकन क्रमशः ₹150, ₹175, और ₹190 हैं। ज्ञात कीजिए:

(i) प्रत्येक बोलीदाता की संतुलन बोली । (3अंक)

(ii) विजेता तथा भुगतान की गई कीमत। (2अंक)

(iii) ऐसी स्थिति में नीलामी आयोजक द्वितीय-मूल्य नीलामी की अपेक्षा प्रथम-मूल्य नीलामी को कब प्राथमिकता देगा? (4 अंक)

(ख) निम्नलिखित खेल के लिए मिश्रित रणनीति नैश संतुलन ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक खिलाड़ी के अपेक्षित प्रतिफल की गणना कीजिए।प्रतिफल वेक्टर में पहली प्रविष्टि पंक्ति खिलाड़ी का प्रतिफल दर्शाती है। (9 अंक)

		खिलाड़ी B	
		C	D
खिलाड़ी A	X	(4,2)	(0,3)
	Y	(2,4)	(3,1)

9. (क) सख्त प्रतिस्पर्धात्मक खेल क्या होता है?निम्नलिखित सामान्य-रूप खेल पर विचार कीजिए और इसका मिश्रित रणनीति नैश संतुलन ज्ञात कीजिए। (9 अंक)

		खिलाड़ी B	
		C	D
खिलाड़ी A	X	(4,-4)	(0,0)
	Y	(2,-2)	(3,-3)

(ख) निम्नलिखित सामान्य-रूप खेल पर विचार कीजिए:

		खिलाड़ी B		
		L	C	R
खिलाड़ी A	U	(5, 3)	(4, 2)	(3, 1)
	M	(4,)	(3, 2)	(2, 1)
	D	(3, 4)	(2, 3)	(1, 2)

सख्त प्रभुत्वशाली तथा कमज़ोर प्रभुत्वशाली रणनीतियों की संकल्पना को परिभाषित कीजिए।दोनों खिलाड़ियों के लिए प्रभुत्वशाली रणनीतियों, यदि कोई हों, की पहचान कीजिए। (9 अंक)

10. निम्नलिखित सामान्य-रूप खेल पर विचार कीजिए:

खिलाड़ी 1 (आरव) और खिलाड़ी 2 (भावना)प्रत्येक के पास दो विकल्प हैं:: निवेश करना (I) या निवेश न करना(N)।

प्रतिफल (आरव, भावना) के रूप में इस प्रकार दी गई हैं:

		भावना	
		निवेश करना	निवेश न करना
आरव	निवेश करना	(y,y)	(1,3)
	निवेश न करना	(3,1)	(2,2)

(d) किन-किन मानों के लिए y पर यह खेल एकमात्र नैश संतुलन रखता है?उन मानों के लिए संतुलन की पहचान कीजिए। (4 अंक)

(e) किन-किन मानों के लिए y पर यह खेल मिश्रित रणनीति नैश संतुलन रखता है?मिश्रित संतुलन में प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा निवेश (I) चुनने की प्रायिकता (y के पदों में) ज्ञात कीजिए। (8 अंक)

(f) मान लीजिए y=5. दोनों खिलाड़ियों के सर्वोत्तम प्रतिक्रिया फलन व्युत्पन्न कीजिए तथा उनका ग्राफ बनाइए तथा उनका उपयोग करके सभी नैश संतुलन (शुद्ध तथा मिश्रित) की पहचान कीजिए। (6 अंक)

11. एक द्वि-खिलाड़ी अनुक्रमिक खेल पर विचार कीजिए जिसमें सममित सूचना उपलब्ध है। इस खेल में खिलाड़ी 1 पहले चाल चलता है और एक क्रिया $\alpha \in \{A, B\}$, का चयन करता है।उसके बाद खिलाड़ी 2, खिलाड़ी 1 के चयन को देखता है तथा एक क्रिया $\beta \in \{X, Y\}$ का चयन करता है। इससे प्राप्त होने वाले प्रतिफल (खिलाड़ी 1, खिलाड़ी 2) इस प्रकार हैं: यदि खिलाड़ी 1, A चुनता है, तो खिलाड़ी 2 के X चुनने पर प्रतिफल (5, 1) तथा Y चुनने पर प्रतिफल (2, 4) होती है।यदि खिलाड़ी 1, B चुनता है, तो खिलाड़ी 2 के X चुनने पर प्रतिफल (3, 3) तथा Y चुनने पर प्रतिफल (4, 2) होती है।

(d) खेल को विस्तृत रूप में निरूपित कीजिए। (6 अंक)

(e) पश्चगामी आगमन विधि का उपयोग करते हुए खिलाड़ी 2 की इष्टतम रणनीति ज्ञात कीजिए।खिलाड़ी 2 की प्रतिक्रिया को देखते हुए खिलाड़ी 1 के इष्टतम चयन को पहचानिए,तथा इस खेल का उप-खेल पूर्ण नैश संतुलन ज्ञात कीजिए। (8 अंक)

(f) भाग (b) में प्राप्त परिणाम की तुलना उसी खेल के समकालिक चाल संस्करण के संतुलन से कीजिए तथा टिप्पणी कीजिए कि क्या संतुलन परिणाम बदलता है। (4 अंक)

12. (क) दो खिलाड़ी क्षय युद्ध में संलग्न हैं। पुरस्कार का मूल्य □10 है। प्रत्येक खिलाड़ी बाहर निकलने या बने रहने का चयन कर सकता है। प्रत्येक सेकंड जब कोई खिलाड़ी खेल में बना रहता है, तो उसे □1 की लागत वहन करनी पड़ती है। इस स्थिति को एक खेल के रूप में प्रतिरूपित कीजिए तथा तथा इसका संतुलन निर्धारित कीजिए। आपके द्वारा बनाई गई किन्हीं धारणाओं की चर्चा कीजिए।

(ख) दो राजनीतिक दल ऐसे मतदाताओं का सामना कर रहे हैं, जिनका कुल द्रव्यमान 1 है और जो किसी नीति स्थिति जैसे सार्वजनिक वस्तु के प्रावधान के स्तर पर समान रूप से वितरित हैं।ऐसी स्थिति में, नैश संतुलन में दोनों दल कौन-सी नीति स्थिति चुनेंगे? इसे एक आरेख की सहायता से स्पष्ट कीजिए। (9 अंक)

(700)