[This question paper contains **4** printed pages.]

Your Roll No_____

Sr. No. of Question Paper : **5069**

Unique Paper Code : 2274000016

Name of the Paper : Game Theory and Social Sciences

Name of the Course : General Elective (GE)

Semester : IV/VI/VIII

Duration : 3 hours **Maximum Marks : 90 Marks**

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any five questions.
3. Answers may be written either in English or Hindi but the same medium should be used throughout the paper.
4. Use of a simple calculator is allowed.

1. Consider the following normal-form game. The first entry in a pay-off vector is row player's pay-off.

		Player B		
		Left	Right	Centre
Player A	Up	(6,4)	(3,8)	(4, 5)
	Down	(4,3)	(1,6)	(2, 2)
	Middle	(5, 1)	(2, 0)	(3, 0)

(a) Explain the concept of dominant and dominated strategies. (4 marks)
(b) Identify dominant strategies, if any. (6 marks)
(c) Perform iterated elimination of strictly dominated strategies. (4 marks)
(d) Find the Nash equilibrium. (4 marks)

2. Consider the following payoff matrix for a strictly competitive game. The first entry in a pay-off vector is row player's pay-off.

		Player B: Head	Player B: Tail
Player A	Head	(3,-3)	(-2,2)
	Tail	(-2,2)	(3,-3)

(a) Find the mixed strategy Nash equilibrium. (8 marks)
(b) Why would the players want to play the mixed strategy equilibrium you identified in part (i)? (5 marks)
(c) How is equilibrium related to maximization in strictly competitive games? (5 marks)

3. Consider a unidimensional issue space [0,1] and two political candidates A and B who want to maximize votes. Voters are uniformly distributed. Both candidates simultaneously choose positions.

(a) Model this as a strategic game. (6 marks)
(b) Identify the best response functions of the candidates in this game; (6 marks)
(c) Find the Nash equilibrium using these best response functions. (6 marks)

4. Is the following game symmetric? Can you interpret this as a game of reporting a crime? If yes, then explain, if not then how would you change the payoffs to represent such a situation? Derive the best response functions for both players and find all pure strategy Nash equilibria. (12 marks)

		Player B: X	Player B: Y
Player A	P	(4,4)	(2,6)
	Q	(6,2)	(0,0)

5. (a) A seller wants to sell an indivisible object. There are two prospective buyers, whose valuations are uniformly distributed in the [0, 1] interval and privately observed. In this context, compare and contrast the First-Price Sealed-Bid Auction and the Second-Price Sealed-Bid Auction. Discuss the optimal bidding strategy in each. (6 marks)

(b) Two players are engaged in a war of attrition. The prize is worth ₹10. Each player can choose to quit or stay. Each second a player stays in the game, they incur a cost of ₹1. Model this as a game and identify the equilibrium. Discuss any assumptions made. (12 marks)

6. Consider a two-player sequential game with symmetric information in which Player 1 moves first by choosing an action $a_1 \in \{L, R\}$, after which Player 2 observes Player 1's choice and selects an action $a_2 \in \{l, r\}$. The resulting payoffs (Player 1, Player 2) are as follows: if Player 1 chooses L, then Player 2 choosing l yields (4, 2) and choosing r yields

(1, 3); if Player 1 chooses R, then Player 2 choosing l yields (2, 1) and choosing r yields (3, 4).

(a) Represent the game in extensive form. (6 marks)

(b) Determine Player 2's optimal strategy using backward induction, identify Player 1's optimal choice anticipating Player 2's response, and find the Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE) of the game. (8 marks)

(c) Compare the outcome in part (b) with the equilibrium of the simultaneous-move version of the same game and comment on whether the equilibrium outcome changes. (4 marks)

प्रश्न 1 निम्नलिखित सामान्य रुप खेल पर विचार कीजिए। पे ऑफ वेक्टर में पहली प्रविष्टि पंक्ति खिलाड़ी का पे ऑफ है।

		Player B		
		Left	Right	Centre
Player A	Up	(6,4)	(3,8)	(4, 5)
	Down	(4,3)	(1,6)	(2, 2)
	Middle	(5, 1)	(2, 0)	(3, 0)

(a) प्रभावी (dominant) और गौण (dominated) रणनीतियों की अवधारणा की व्याख्या कीजिए। (4 अंक)

(b) प्रभावी रणनीतियों, यदि कोई हो, की पहचान कीजिए। (6 अंक)

(c) "पूर्णतः गौण रणनीतियों के क्रमिक विलोपन की प्रक्रिया पूर्ण कीजिए। (4 अंक)

(d) नैश संतुलन (Nash equilibrium) ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

प्रश्न 2 एक पूर्णतः प्रतिस्पर्धी खेल के लिए निम्नलिखित पे-ऑफ मैट्रिक्स पर विचार कीजिए। पे-ऑफ वेक्टर में पहली प्रविष्टि पंक्ति खिलाड़ी (row player) का पे-ऑफ है।

		Player B	
		Head	Tail
Player A	Head	(3,-3)	(-2,2)
	Tail	(-2,2)	(3,-3)

(a) मिश्रित रणनीति नैश संतुलन ज्ञात कीजिए। (8 अंक)

(b) खिलाड़ी उस मिश्रित रणनीति संतुलन को क्यों खेलना चाहेंगे जिसे आपने भाग (i) में ज्ञात किया है? (5 अंक)

(c) पूर्णतः प्रतिस्पर्धी खेलों में संतुलन, अधिकतमकरण (maximization) से कैसे संबंधित है? (5 अंक)

प्रश्न 3 एकविमीय मुद्दा अंतराल (unidimensional issue space) [0,1] और वोटों को अधिकतम करने की इच्छा रखने वाले दो राजनीतिक उम्मीदवारों A और B पर विचार कीजिए। मतदाता समान रूप से वितरित (uniformly distributed) हैं। दोनों उम्मीदवार एक साथ अपने स्थानों (positions) का चयन करते हैं।

(a) इसे एक रणनीतिक खेल (strategic game) के रूप में मॉडल कीजिए। (6 अंक)

(b) इस खेल में उम्मीदवारों के सर्वोत्तम प्रतिक्रिया फलनों (best response functions) की पहचान कीजिए; (6 अंक)

(c) इन सर्वोत्तम प्रतिक्रिया फलनों का उपयोग करके नैश संतुलन ज्ञात कीजिए। (6 अंक)

प्रश्न 4 क्या निम्नलिखित खेल सममित (symmetric) है? क्या आप इसे अपराध की रिपोर्ट करने वाले खेल (game of reporting a crime) के रूप में व्याख्यायित कर सकते हैं? यदि हाँ, तो समझाइए, यदि नहीं, तो आप ऐसी स्थिति का प्रतिनिधित्व करने के लिए पे-ऑफ (payoffs) में क्या बदलाव करेंगे? दोनों खिलाड़ियों के लिए सर्वोत्तम प्रतिक्रिया फलनों (best response functions) को व्युत्पन्न कीजिए और सभी शुद्ध रणनीति नैश संतुलन (pure strategy Nash equilibria) ज्ञात कीजिए। (12 अंक)

		Player B	
		X	Y
Player A	P	(4,4)	(2,6)
	Q	(6,2)	(0,0)

प्रश्न 5 (a) एक विक्रेता एक अविभाज्य वस्तु (indivisible object) की बिक्री करना चाहता है। इसके दो संभावित खरीदार हैं, जिनका मूल्यांकन [0, 1] अंतराल में समान रूप से वितरित (uniformly distributed) है और निजी तौर पर प्रेक्षित (privately observed) है। इस संदर्भ में, प्रथम-मूल्य सीलबंद-बोली नीलामी (First-Price Sealed-Bid Auction) और दवितीय-मूल्य सीलबंद-बोली नीलामी (Second-Price Sealed-Bid Auction) की तुलना और विषमता स्पष्ट कीजिए। प्रत्येक में इष्टतम बोली रणनीति (optimal bidding strategy) पर चर्चा कीजिए। (6 अंक)
(b) दो खिलाड़ी 'वॉर ऑफ एट्रिशन' (war of attrition) में लगे हुए हैं। पुरस्कार का मूल्य 10 रुपए है। प्रत्येक खिलाड़ी छोड़ने (quit) या बने रहने (stay) का विकल्प चुन सकता है। खेल में बने रहने के प्रत्येक सेकंड के लिए खिलाड़ी को 1 रुपए की लागत वहन करनी पड़ती है। इसे एक खेल के रूप में मॉडल कीजिए और संतुलन (equilibrium) की पहचान कीजिए। बनाई गई किसी भी मान्यता (assumption) पर चर्चा कीजिए। (12 अंक)

प्रश्न 6 किसी दो-खिलाड़ी अनुक्रमिक खेल (sequential game) पर विचार कीजिए, जिसमें सममित सूचना (symmetric information) है। इसमें खिलाड़ी 1 पहले कार्य $a_1 \in \{L, R\}$,को चुनकर अपनी चाल चलता है, जिसके बाद खिलाड़ी 2 खिलाड़ी 1 के चयन को देखता है और कार्य $a_2 \in \{l, r\}$ का चयन करता है। परिणामी पे-ऑफ (खिलाड़ी 1, खिलाड़ी 2) इस प्रकार हैं:
यदि खिलाड़ी 1, L को चुनता है, तो खिलाड़ी 2 के l चुनने पर (4, 2) प्राप्त होता है और r चुनने पर (1, 3) प्राप्त होता है; यदि खिलाड़ी 1, R चुनता है, तो खिलाड़ी 2 के l चुनने पर (2, 1) प्राप्त होता है और r चुनने पर (3, 4) प्राप्त होता है।
(a) इस खेल को विस्तृत रूप (extensive form) में प्रस्तुत कीजिए। (6 अंक)

(b) पश्चगामी आगमन (backward induction) का उपयोग करते हुए खिलाड़ी 2 की इष्टतम रणनीति निर्धारित कीजिए, खिलाड़ी 2 की प्रतिक्रिया का पूर्वानुमान लगाते हुए खिलाड़ी 1 के इष्टतम चयन की पहचान कीजिए, और खेल का उप-खेल पूर्ण नैश संतुलन (Subgame Perfect Nash Equilibrium - SPNE) ज्ञात कीजिए। (8 अंक)

(c) भाग (b) के परिणाम की तुलना इसी खेल के समकालिक-चाल (simultaneous-move) संस्करण के संतुलन से कीजिए और टिप्पणी कीजिए कि क्या संतुलन परिणाम में परिवर्तन आता है। (4 अंक) (200)