

[This question paper contains 16 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 7544

L

Unique Paper Code : 2273100024

Name of the Paper : Forecasting Methods for Economics

Name of the Course : Common Pool of DSE

Semester : VI/VIII

Duration: 3 hours

Maximum Marks: 90

(Write Your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note: Answers may be written either in English or in Hindi, but the same medium should be used throughout the paper.

1. This Question paper consists of three sections. Attempt all questions from Section I and any two out of three from Sections II and III.
2. Marks are indicated against each question.
3. Use of a simple non-programmable calculator is allowed.
4. Statistical tables are attached for your reference.

SECTION -I

All Questions are compulsory

1. Explain the different types of considerations necessary for successful forecasting.
2. Explain the following judgmental forecasting methods:
 - (i) Jury of Executive Opinion Method
 - (ii) Sales Force Composite Method
 - (iii) Anticipatory Surveys and Individual Subjective Assessment Method. (10, 10)

SECTION -II

Attempt any two questions out of three

3. A company observes the following quarterly sales data:

Quarter	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Sales	120	150	180	210	140	170	200	230

It is believed that the series exhibits trend and seasonal variation.

Seasonal indices (multiplicative): Q1 = 0.8, Q2 = 1.0, Q3 = 1.2, Q4 = 1.4

Smoothing constant $\alpha = 0.3$

Initial forecast $F_1 = 130$

- Explain why a multiplicative decomposition model is appropriate.
- Deseasonalize the first four observations. Show calculations clearly.
- Using the deseasonalized value of period 4 and the given initial forecast, compute the smoothed forecast for period 5 using simple exponential smoothing.
- Re-seasonalize your forecast for period 5.
- Explain one limitation of using simple exponential smoothing for this series and suggest a better alternative. (3, 4, 4, 2, 2)

4 a). A researcher collected the following data on actual observations and their corresponding forecasts:

Time Period	Actual Value (Y_t)	Forecast Value (F_t)
1	50	48
2	55	53
3	60	65
4	58	57
5	62	60
6	65	67
7	70	68
8	68	66
9	72	75
10	75	73

Assume the naïve forecast is:

$$F_t^{(N)} = Y_{t-1}$$

- Compute Theil's U statistic for the above data.
 - Interpret the value of Theil's U and compare the model's performance with the naïve forecast.
 - Explain why Theil's U is preferred over measures such as MSE when evaluating forecasting models. (5, 3, 2)
- b) What are influential observations in data analysis? (5)
- 5.a) Explain how to test the overall significance of a multiple regression model. (8)

- b) Establish the relationship between the coefficient of determination (R^2) and the F-test. (7)

SECTION -II

Attempt any two questions out of three

- 6.a) Derive the ACF of AR(1) and show that it decays exponentially? (10)

- b) Consider the MA(1) process:

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- (i) Explain what is meant by a stationary time series. Using the MA(1) model above, explain whether the process is stationary and why?
- (ii) Describe how shocks affect the value of the series over time.
- (iii) State the expected pattern of the autocorrelation function (ACF). (10)

7. a). Describe the Box–Jenkins approach in a step-by-step manner. (10)

- b) Consider the following ARMA (2,1) model:

$$Y_t = 10 + 0.6 Y_{t-1} - 0.3 Y_{t-2} + \varepsilon_t + 0.5 \varepsilon_{t-1}$$

where ε_t is white noise, and Y is a stationary variable. The model and all its coefficients are statistically significant.

- (i) Identify the autoregressive and moving average parts of the model and interpret the coefficients 0.6 and 0.5.
- (ii) Explain how a shock ε_t affects the value of Y_t and its future values.
- (iii) What pattern would you expect in the autocorrelation function (ACF) of this process? Explain briefly. (5, 3, 2)

- 8.a) Consider the following estimated long-run relationship between two variables:

$$Y_t = 2 + 0.8X_t + u_t$$

The residuals $\hat{u}_t$ are found to be stationary. The following Error Correction Model (ECM) is estimated:

$$\Delta Y_t = 0.5 \Delta X_t - 0.6 \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$$

- (i) What does the stationarity of $\hat{u}_t$ imply about Y_t and X_t ?

- (ii) Write the error correction term (ECT) explicitly using the long-run equation.
- (iii) Interpret the coefficient of the error correction term.
- (iv) Distinguish clearly between the short-run effects and long-run equilibrium using the ECM above. (2, 2, 3, 3)

b) Consider the model:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + u_t$$

$$\widehat{\beta}_1 = 0.5 \text{ (t = 2.8)} \quad \widehat{\beta}_2 = 0.4 \text{ (t = 2.5)}$$

- (i) Why is testing individual t-values not sufficient for Granger causality?
- (ii) State the correct joint null hypothesis.
- (iii) Based on the information, would X Granger-cause Y ? Justify.
- (iv) Explain the role of lagged Y in this model. (3, 2, 2, 3)

खंड-I (SECTION-I)

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं

1. सफल पूर्वानुमान (forecasting) के लिए आवश्यक विभिन्न प्रकार के विचारों/बातों की व्याख्या कीजिए। (10 अंक)

2. निम्नलिखित निर्णयात्मक पूर्वानुमान विधियों (judgmental forecasting methods) की व्याख्या कीजिए:

(i) कार्यकारी राय की जूरी विधि (Jury of Executive Opinion Method)

(ii) सेल्स फोर्स कम्पोजिट विधि (Sales Force Composite Method)

(iii) अग्रिम सर्वेक्षण और व्यक्तिगत व्यक्तिपरक मूल्यांकन विधि (Anticipatory Surveys and Individual Subjective Assessment Method)। (10 अंक)

खंड-II (SECTION-II)

तीन में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दे

3. एक कंपनी निम्नलिखित त्रैमासिक (quarterly) बिक्री डेटा देखती है:

तिमाही	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
बिक्री	120	150	180	210	140	170	200	230

यह माना जाता है कि श्रृंखला में प्रवृत्ति (trend) और मौसमी बदलाव (seasonal variation) दिखाई देते हैं।

मौसमी सूचकांक (गुणात्मक): Q1=0.8, Q2=1.0, Q3=1.2, Q4=1.4

स्मूथिंग स्थिरांक $\alpha=0.3$

प्रारंभिक पूर्वानुमान $F_{\{1\}}=130$

- a) समझाएं कि एक गुणात्मक अपघटन मॉडल (multiplicative decomposition model) क्यों उपयुक्त है।
- b) पहले चार अवलोकनों को 'डिसीज़नालाइज़' (deseasonalize) कीजिए। गणना स्पष्ट रूप से दिखाएं।
- c) अवधि 4 के डिसीज़नालाइज़्ड मूल्य और दिए गए प्रारंभिक पूर्वानुमान का उपयोग करके, सरल घातीय स्मूथिंग (simple exponential smoothing) का उपयोग करके अवधि 5 के लिए स्मूथ पूर्वानुमान की गणना कीजिए।
- d) अवधि 5 के लिए अपने पूर्वानुमान को पुनः मौसमी (re-seasonalize) बनाएं।
- e) इस श्रृंखला के लिए सरल घातीय स्मूथिंग के उपयोग की एक सीमा बताएं और एक बेहतर विकल्प सुझाएं। (3, 4, 4, 2, 2 अंक)

4 a). एक शोधकर्ता ने वास्तविक अवलोकनों और उनके संबंधित पूर्वानुमानों पर निम्नलिखित डेटा एकत्र किया:

समय अवधि	वास्तविक मूल्य (Y_t)	पूर्वानुमान मूल्य (F_t)
1	50	48
2	55	53
3	60	65
4	58	57
5	62	60
6	65	67
7	70	68
8	68	66
9	72	75
10	75	73

मान लें कि 'नाइव' (naïve) पूर्वानुमान है: $F_t(N) = Y_{t-1}$

- (i) उपरोक्त डेटा के लिए थील के यू-सांख्यिकी (Theil's U statistic) की गणना कीजिए।
- (ii) थील के यू-मूल्य की व्याख्या कीजिए और नाइव पूर्वानुमान के साथ मॉडल के प्रदर्शन की तुलना कीजिए।

(iii) समझाएं कि पूर्वानुमान मॉडल का मूल्यांकन करते समय एमएसई जैसे उपायों की तुलना में थील के यू (Theil's U) को क्यों प्राथमिकता दी जाती है। (5, 3, 2 अंक)

4 b). डेटा विश्लेषण में प्रभावशाली अवलोकन (influential observations) क्या हैं? (5 अंक)

5 a). समझाएं कि एक बहु-प्रतिगमन मॉडल (multiple regression model) के समग्र महत्व का परीक्षण कैसे किया जाता है। (8 अंक)

5 b). निर्धारण गुणांक (R^2) और F-परीक्षण के बीच संबंध स्थापित कीजिए। (7 अंक)

खंड-III (SECTION-III)

तीन में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दें

6 a). AR(1) का ACF व्युत्पन्न (derive) कीजिए और दिखाएं कि यह तेजी से (exponentially) घटता है? (10 अंक)

6 b). MA(1) प्रक्रिया पर विचार कीजिए:

(i) एक स्थिर समय श्रृंखला (stationary time series) से क्या तात्पर्य है? ऊपर दिए गए MA(1) मॉडल का उपयोग करते हुए, समझाएं कि क्या यह प्रक्रिया स्थिर है और क्यों?

(ii) वर्णन कीजिए कि झटके (shocks) समय के साथ श्रृंखला के मूल्य को कैसे प्रभावित करते हैं।

(iii) ऑटोकोरिलेशन फ़ंक्शन (ACF) के अपेक्षित पैटर्न को बताएं। (10 अंक)

7 a). बॉक्स-जेनकिंस दृष्टिकोण का चरण-दर-चरण वर्णन कीजिए। (10 अंक)

7 b). निम्नलिखित ARMA (2,1) मॉडल पर विचार कीजिए:

$$Y_t = 10 + 0.6 Y_{t-1} - 0.3 Y_{t-2} + \epsilon_t + 0.5 \epsilon_{t-1}$$

जहाँ ϵ_t व्हाइट नॉइज़ है, और Y एक स्थिर चर है। मॉडल और इसके सभी गुणांक सांख्यिकीय रूप से महत्वपूर्ण हैं।

(i) मॉडल के ऑटोरेग्रेसिव (autoregressive) और मूविंग एवरेज (moving average) भागों की पहचान कीजिए और गुणांक 0.6 और 0.5 की व्याख्या कीजिए।

(ii) समझाएं कि एक झटका ε_t Y_t के मूल्य और उसके भविष्य के मूल्यों को कैसे प्रभावित करता है।

(iii) आप इस प्रक्रिया के ऑटोकोरिलेशन फ़ंक्शन (ACF) में किस पैटर्न की उम्मीद कीजिएगे? संक्षेप में समझाएं। (5, 3, 2 अंक)

8 a). दो चरों के बीच निम्नलिखित अनुमानित दीर्घकालिक संबंध पर विचार कीजिए:

$$Y_t = 2 + 0.8X_t + u_t$$

अवशेष (residuals) u_t स्थिर पाए गए हैं। निम्नलिखित त्रुटि सुधार मॉडल (ECM) का अनुमान लगाया गया है:

$$\Delta Y_t = 0.5\Delta X_t - 0.6u_{t-1} + \varepsilon_t$$

(i) u_t की स्थिरता Y_t और X_t के बारे में क्या दर्शाती है?

(ii) दीर्घकालिक समीकरण का उपयोग करके त्रुटि सुधार पद (ECT) को स्पष्ट रूप से लिखें।

(iii) त्रुटि सुधार पद (ECT) के गुणांक की व्याख्या कीजिए।

(iv) उपरोक्त ECM का उपयोग करके अल्पकालिक प्रभावों और दीर्घकालिक संतुलन के बीच स्पष्ट अंतर बताएं। (2, 2, 3, 3 अंक)

8 b). मॉडल पर विचार कीजिए:

(i) ग्रेंजर कारणता (Granger causality) के लिए व्यक्तिगत t -मानों का परीक्षण करना पर्याप्त क्यों नहीं है?

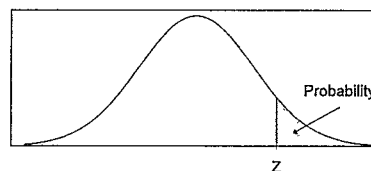
(ii) सही संयुक्त शून्य परिकल्पना (joint null hypothesis) बताएं।

(iii) जानकारी के आधार पर, क्या X , Y का ग्रेंजर-कारण (Granger-cause) बनेगा? औचित्य सिद्ध कीजिए।

(iv) इस मॉडल में लैग्ड Y (Y_{t-1}) की भूमिका स्पष्ट कीजिए। (3, 2, 2, 3 अंक)

A: Normal probabilities

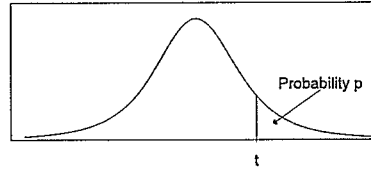
Table entry is the probability in the right-hand tail of a standard normal distribution (mean 0 and standard deviation 1). For negative values of z , probabilities are found by symmetry.



z	Second decimal place of z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

B: Critical values for t statistic

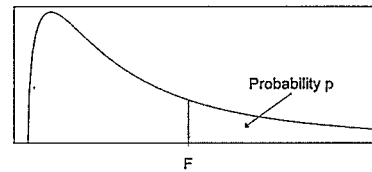
Table entry is the point t with the probability p lying above it. The first column gives the degrees of freedom. Use symmetry for negative t values.



df	Tail probability p				
	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
50	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
70	1.29	1.67	1.99	2.38	2.65
80	1.29	1.66	1.99	2.37	2.64
90	1.29	1.66	1.99	2.37	2.63
100	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58
	80%	90%	95%	98%	99%
	Confidence level				

C: Critical values for F statistic

Table entry is the point F with the probability p lying above it. The first column gives the df in the denominator, the column headings give the df in the numerator. The second column gives the value of p .



denom. df ₂	p	numerator df ₁									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2
	0.05	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
	0.01	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8
2	0.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39
	0.05	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
	0.01	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40
3	0.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23
	0.05	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
	0.01	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23
4	0.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92
	0.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
	0.01	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55
5	0.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30
	0.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
	0.01	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05
6	0.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94
	0.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
	0.01	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87
7	0.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70
	0.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
	0.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62
8	0.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54
	0.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
	0.01	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81
9	0.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42
	0.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
	0.01	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26
10	0.10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32
	0.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
	0.01	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85

11	12	13	14	15	20	25	30	60	120	∞
60.5	60.7	60.9	61.1	61.2	61.7	62.1	62.3	62.8	63.1	63.3
243.0	243.9	244.7	245.4	245.9	248.0	249.3	250.1	252.2	253.3	254.3
6083.3	6106.3	6125.9	6142.7	6157.3	6208.7	6239.8	6260.6	6313.0	6339.4	6365.8
9.40	9.41	9.41	9.42	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
19.40	19.41	19.42	19.42	19.43	19.45	19.46	19.46	19.48	19.49	19.50
99.40	99.42	99.42	99.43	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.49	99.50
5.22	5.22	5.21	5.20	5.2	5.18	5.17	5.17	5.15	5.14	5.13
8.76	8.74	8.73	8.71	8.7	8.66	8.63	8.62	8.57	8.55	8.53
27.13	27.05	26.98	26.92	26.9	26.69	26.58	26.50	26.32	26.22	26.13
3.91	3.90	3.89	3.88	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
14.45	14.37	14.31	14.25	14.20	14.02	13.91	13.84	13.65	13.56	13.46
3.28	3.27	3.26	3.25	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.10
4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.56	4.52	4.50	4.43	4.40	4.36
9.96	9.89	9.82	9.77	9.72	9.55	9.45	9.38	9.20	9.11	9.02
2.92	2.90	2.89	2.88	2.87	2.84	2.81	2.80	2.76	2.74	2.72
4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.87	3.83	3.81	3.74	3.70	3.67
7.79	7.72	7.66	7.60	7.56	7.40	7.30	7.23	7.06	6.97	6.88
2.68	2.67	2.65	2.64	2.63	2.59	2.57	2.56	2.51	2.49	2.47
3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.44	3.40	3.38	3.30	3.27	3.23
6.54	6.47	6.41	6.36	6.31	6.16	6.06	5.99	5.82	5.74	5.65
2.52	2.50	2.49	2.48	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.15	3.11	3.08	3.01	2.97	2.93
5.73	5.67	5.61	5.56	5.52	5.36	5.26	5.20	5.03	4.95	4.86
2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.18	2.16
3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.94	2.89	2.86	2.79	2.75	2.71
5.18	5.11	5.05	5.01	4.96	4.81	4.71	4.65	4.48	4.40	4.31
2.30	2.28	2.27	2.26	2.24	2.20	2.17	2.16	2.11	2.08	2.06
2.94	2.91	2.89	2.86	2.84	2.77	2.73	2.70	2.62	2.58	2.54
4.77	4.71	4.65	4.60	4.56	4.41	4.31	4.25	4.08	4.00	3.91

	<i>p</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	0.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25
	0.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85
	0.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54
12	0.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19
	0.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
	0.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30
13	0.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14
	0.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67
	0.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10
14	0.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10
	0.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60
	0.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94
15	0.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06
	0.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
	0.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80
16	0.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03
	0.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
	0.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69
17	0.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00
	0.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45
	0.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59
18	0.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98
	0.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
	0.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51
19	0.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96
	0.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38
	0.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43
20	0.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94
	0.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
	0.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37
21	0.10	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92
	0.05	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
	0.01	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31
22	0.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90
	0.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30
	0.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26

11	12	13	14	15	20	25	30	60	120	∞
2.23	2.21	2.19	2.18	2.17	2.12	2.10	2.08	2.03	2.00	1.97
2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.65	2.60	2.57	2.49	2.45	2.40
4.46	4.40	4.34	4.29	4.25	4.10	4.01	3.94	3.78	3.69	3.60
2.17	2.15	2.13	2.12	2.10	2.06	2.03	2.01	1.96	1.93	1.90
2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.54	2.50	2.47	2.38	2.34	2.30
4.22	4.16	4.10	4.05	4.01	3.86	3.76	3.70	3.54	3.45	3.36
2.12	2.10	2.08	2.07	2.05	2.01	1.98	1.96	1.90	1.88	1.85
2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.46	2.41	2.38	2.30	2.25	2.21
4.02	3.96	3.91	3.86	3.82	3.66	3.57	3.51	3.34	3.25	3.17
2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	1.96	1.93	1.91	1.86	1.83	1.80
2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.39	2.34	2.31	2.22	2.18	2.13
3.86	3.80	3.75	3.70	3.66	3.51	3.41	3.35	3.18	3.09	3.00
2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.92	1.89	1.87	1.82	1.79	1.76
2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.33	2.28	2.25	2.16	2.11	2.07
3.73	3.67	3.61	3.56	3.52	3.37	3.28	3.21	3.05	2.96	2.87
2.01	1.99	1.97	1.95	1.94	1.89	1.86	1.84	1.78	1.75	1.72
2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.28	2.23	2.19	2.11	2.06	2.01
3.62	3.55	3.50	3.45	3.41	3.26	3.16	3.10	2.93	2.84	2.75
1.98	1.96	1.94	1.93	1.91	1.86	1.83	1.81	1.75	1.72	1.69
2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.23	2.18	2.15	2.06	2.01	1.96
3.52	3.46	3.40	3.35	3.31	3.16	3.07	3.00	2.83	2.75	2.65
1.95	1.93	1.92	1.90	1.89	1.84	1.80	1.78	1.72	1.69	1.66
2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.19	2.14	2.11	2.02	1.97	1.92
3.43	3.37	3.32	3.27	3.23	3.08	2.98	2.92	2.75	2.66	2.57
1.93	1.91	1.89	1.88	1.86	1.81	1.78	1.76	1.70	1.67	1.63
2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.16	2.11	2.07	1.98	1.93	1.88
3.36	3.30	3.24	3.19	3.15	3.00	2.91	2.84	2.67	2.58	2.49
1.91	1.89	1.87	1.86	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.64	1.61
2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.12	2.07	2.04	1.95	1.90	1.84
3.29	3.23	3.18	3.13	3.09	2.94	2.84	2.78	2.61	2.52	2.42
1.90	1.88	1.86	1.84	1.83	1.78	1.74	1.72	1.66	1.62	1.59
2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.10	2.05	2.01	1.92	1.87	1.81
3.24	3.17	3.12	3.07	3.03	2.88	2.78	2.72	2.55	2.46	2.36
1.88	1.86	1.84	1.83	1.81	1.76	1.73	1.70	1.64	1.60	1.57
2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.07	2.02	1.98	1.89	1.84	1.78
3.18	3.12	3.07	3.02	2.98	2.83	2.73	2.67	2.50	2.40	2.31

	<i>p</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
23	0.10	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89
	0.05	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27
	0.01	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21
24	0.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88
	0.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
	0.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17
25	0.10	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87
	0.05	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
	0.01	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13
26	0.1	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86
	0.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22
	0.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09
27	0.10	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85
	0.05	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
	0.01	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06
28	0.1	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84
	0.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
	0.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03
29	0.10	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83
	0.05	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18
	0.01	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00
30	0.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82
	0.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16
	0.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98
40	0.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76
	0.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08
	0.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80
50	0.10	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73
	0.05	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03
	0.01	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70
60	0.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71
	0.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99
	0.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63
100	0.1	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66
	0.05	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93
	0.01	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50
200	0.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63
	0.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88
	0.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41
1,000	0.10	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61
	0.05	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84
	0.01	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.42	2.34

11	12	13	14	15	20	25	30	60	120	∞
1.87	1.84	1.83	1.81	1.80	1.74	1.71	1.69	1.62	1.59	1.55
2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.05	2.00	1.96	1.86	1.81	1.76
3.14	3.07	3.02	2.97	2.93	2.78	2.69	2.62	2.45	2.35	2.26
1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
3.09	3.03	2.98	2.93	2.89	2.74	2.64	2.58	2.40	2.31	2.21
1.84	1.82	1.80	1.79	1.77	1.72	1.68	1.66	1.59	1.56	1.52
2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.01	1.96	1.92	1.82	1.77	1.71
3.06	2.99	2.94	2.89	2.85	2.70	2.60	2.54	2.36	2.27	2.17
1.83	1.81	1.79	1.77	1.76	1.71	1.67	1.65	1.58	1.54	1.50
2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	1.99	1.94	1.90	1.80	1.75	1.69
3.02	2.96	2.90	2.86	2.82	2.66	2.57	2.50	2.33	2.23	2.13
1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.70	1.66	1.64	1.57	1.53	1.49
2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	1.97	1.92	1.88	1.79	1.73	1.67
2.99	2.93	2.87	2.82	2.78	2.63	2.54	2.47	2.29	2.20	2.10
1.81	1.79	1.77	1.75	1.74	1.69	1.65	1.63	1.56	1.52	1.48
2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	1.96	1.91	1.87	1.77	1.71	1.65
2.96	2.90	2.84	2.79	2.75	2.60	2.51	2.44	2.26	2.17	2.06
1.80	1.78	1.76	1.75	1.73	1.68	1.64	1.62	1.55	1.51	1.47
2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	1.94	1.89	1.85	1.75	1.70	1.64
2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.57	2.48	2.41	2.23	2.14	2.03
1.79	1.77	1.75	1.74	1.72	1.67	1.63	1.61	1.54	1.50	1.46
2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.93	1.88	1.84	1.74	1.68	1.62
2.91	2.84	2.79	2.74	2.70	2.55	2.45	2.39	2.21	2.11	2.01
1.74	1.71	1.70	1.68	1.66	1.61	1.57	1.54	1.47	1.42	1.38
2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.84	1.78	1.74	1.64	1.58	1.51
2.73	2.66	2.61	2.56	2.52	2.37	2.27	2.20	2.02	1.92	1.80
1.70	1.68	1.66	1.64	1.63	1.57	1.53	1.50	1.42	1.38	1.33
1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.78	1.73	1.69	1.58	1.51	1.44
2.62	2.56	2.51	2.46	2.42	2.27	2.17	2.10	1.91	1.80	1.68
1.68	1.66	1.64	1.62	1.60	1.54	1.50	1.48	1.40	1.35	1.29
1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.75	1.69	1.65	1.53	1.47	1.39
2.56	2.50	2.44	2.39	2.35	2.20	2.10	2.03	1.84	1.73	1.60
1.64	1.61	1.59	1.57	1.56	1.49	1.45	1.42	1.34	1.28	1.21
1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.68	1.62	1.57	1.45	1.38	1.28
2.43	2.37	2.31	2.27	2.22	2.07	1.97	1.89	1.69	1.57	1.43
1.60	1.58	1.56	1.54	1.52	1.46	1.41	1.38	1.29	1.23	1.14
1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.62	1.56	1.52	1.39	1.30	1.19
2.34	2.27	2.22	2.17	2.13	1.97	1.87	1.79	1.58	1.45	1.28
1.58	1.55	1.53	1.51	1.49	1.43	1.38	1.35	1.25	1.18	1.06
1.80	1.76	1.73	1.70	1.68	1.58	1.52	1.47	1.33	1.24	1.08
2.27	2.20	2.15	2.10	2.06	1.90	1.79	1.72	1.50	1.35	1.11