[This question paper contains 4 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 5181 **K**

Unique Paper Code : 2272101102

Name of the Paper : Introductory Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : ----

Semester : I (DSC)

Duration : 3 Hours | Maximum Marks : 90

समय : 3 घण्टे | पूर्णांक : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any **five** questions.
3. All parts within each question carry **six** marks, except where marks of a part are specified.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. आठ में से किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दें।
3. कोई भी पाँच प्रश्न हल कीजिये।
4. प्रश्न के जिस भाग के आगे अंक दिये गये हैं उनके अतिरिक्त प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों के लिए छह अंक हैं।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. (a) Use the technique of indirect proof to prove that for two integers x and y: If xy is even then either x is even, or y is even.

   (b) Show that a tangent to the curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ at the point (x_0, y_0) can be written as $x_0^{\frac{-1}{3}} x + y_0^{\frac{-1}{3}} y = 1$. Use this to show that in the first quadrant the length of any tangent to this curve is 1.

   (c) The value of a parcel of land bought for speculation is increasing according to the formula $V = 2000e^{0.5\sqrt{t}}$. If the interest rate is 10 percent, how long should the parcel be held to maximize present value.

(क) दो पूर्णांक x और y के लिए अप्रत्यक्ष उपपत्ति की तकनीक का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिये किरू यदि xy सम है तो या तो x सम है, या y सम है।

(ख) दर्शाइए कि बिन्दू (x_0, y_0) पर वक्र की स्पर्शरेखा $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ को $x_0^{\frac{-1}{3}} x + y_0^{\frac{-1}{3}} y = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। इसका उपयोग यह दर्शाने के लिए कीजिये कि इस प्रथम चतुर्थांश में इस वक्र की किसी भी स्पर्शरेखा की लंबाई 1 है।

(ग) सट्टेबाजी के लिए खरीदे गए जमीन के एक भाग की कीमत $V = 2000e^{0.5\sqrt{t}}$ सूत्र के अनुसार बढ़ रही है। यदि ब्याज की दर 10 प्रतिशत है, तो मौजूदा कीमत को अधिकतम करने के लिए उस भाग को कितने समय तक रखना होगा?

2. (a) Solve the following inequality for x : $\frac{x^2(x-6)}{x-2} > 0$.

(b) Approximate the function $f(x) = x^{1/3}$ by a Taylor polynomial of degree 2 at $x_0 = 8$. Use it to find the approximate value of $9^{1/3}$. Find an upper bound for the error of approximation.

(c) An auditorium with a seating capacity of 200 is hired to stage a school play. The ticket price is Rs. 500 for the first 120 tickets. For every additional ticket sold, the ticket price is reduced by Rs. 2 for all the tickets sold. How many tickets should be sold to maximize the total ticket sales revenue?

(क) x : $\frac{x^2(x-6)}{x-2} > 0$ के लिए निम्नलिखित असमिका को हल कीजिये।

(ख) $x_0 = 8$ पर घात 2 वाले टेलर बहुपद द्वारा $f(x) = x^{1/3}$ फलन को सन्निकट कीजिये। इसका उपयोग $9^{1/3}$ का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए कीजिये। सन्निकटन की त्रुटि के लिए ऊपरी सीमा ज्ञात कीजिये।

(ग) एक स्कूल के नाटक के अभिनय के लिए 200 लोगों के बैठने की क्षमता वाले सभागार को किराए पर लिया गया है। शुरूआती 120 टिकटों के लिए टिकट का मूल्य 500 रूपये है। इसके बाद बिक्री किये गये सभी टिकटों के लिये, बिक्री किये गये प्रत्येक अतिरिक्त टिकट का मूल्य 2 रूपये कम हो जाता है। कुल टिकट बिक्री से होने वाली आय को अधिकतम करने के लिए कितने टिकटों की बिक्री करनी होगी?

3. (a) Evaluate $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ and $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ for $f(x) = e^{\frac{6x^2+x}{5+3x}}$.

(b) Prove that if 'a' and 'b' are strictly positive then the equation $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = 0$ has at least one solution in (1,3)

(c) If a firm produces output x at a total cost $C = ax^2 + bx$, where $a > 0$, find an expression for the elasticity of total cost with respect to x and comment on its value.

(क) $f(x) = e^{\frac{6x^2+x}{5+3x}}$ हेतु $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ और $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ का मूल्यांकन कीजिये।

(ख) यदि 'a' और 'b' पूर्णत: धनात्मक हैं तो समीकरण $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = 0$ का (1,3) में कम से कम एक हल है, सिद्ध कीजिए।

(ग) यदि कोई फर्म कुल लागत $C = ax^2 + bx$, पर आउटपुट x का उत्पादन करती है, जहाँ $a > 0$ है, तो x के सापेक्ष कुल लागत की लोचशीलता हेतु व्यंजक ज्ञात कीजिये और इसके मान पर टिप्पणी कीजिये।

4. (a) For what values of y does the following limit exist: $\lim_{n\to\infty} \frac{y+y^n}{1+y^n}$. Find the limit for the values of y, where the limit exists.

(b) Consider the function $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ if } x < 0 \\ x^2 \text{ if } x \geq 0 \end{cases}$

Is it differentiable everywhere? Is it twice differentiable everywhere?

(c) State Jensen's inequality. Use the inequality to show how the log of the mean of numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ compares with the mean of the log of these numbers.

(क) y के किन मानों के लिए निम्नलिखित प्रतिबंध $\lim_{n\to\infty} \frac{y+y^n}{1+y^n}$ विद्यमान है। जहाँ प्रतिबंध विद्यमान है वहां y के मानों के प्रतिबंध ज्ञात कीजिए।

(ख) फलन $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ if } x < 0 \\ x^2 \text{ if } x \geq 0 \end{cases}$ पर विचार कीजिये। क्या यह सभी जगह अवकलनीय है? क्या यह सभी जगह दो बार अवकलनीय है?

(ग) जेन्सन की असमिका बताइए। इस असमिका का उपयोग करते हुए दर्शाइए कि संख्याओं $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के माध्य का लघुगणक, इन संख्याओं के लघुगणक के माध्य की तुलना में किस प्रकार समान है।

5. (a) Find all asymptotes of $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

(b) Find all the stationary points for the function $f(x) = \frac{1}{x^4-0.5x^2+1}$ and classify these points.

(c) Define global maximum and local maximum points. Are all global extreme points necessarily local extreme points?

(क) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ के सभी अनंतस्पर्शी को ज्ञात कीजिये।

(ख) फलन $f(x) = \frac{1}{x^4-0.5x^2+1}$ के लिए सभी स्थिर बिंदु ज्ञात कीजिये और इन बिंदुओं को वर्गीकृत कीजिये।

(ग) सार्वभौम उच्चिष्ठ और स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दुओं को परिभाषित कीजिये। क्या सभी सार्वभौम आत्यंतिक बिन्दू अनिवार्यत: स्थानीय आत्यंतिक बिन्दू हैं?

6. (a) Solve for x : $|\frac{1}{2}x + 4| = |4x - 6|$.

(b) Determine the domain, asymptotes, first and second derivatives to trace the graph of $g(x) = x^2e^{-x}$. (12)

Alternative question for visually disabled examinees.

(b) Determine the domain, range, asymptotes, first and second derivatives of $g(x) = x^2e^{-x}$ and describe where the function is increasing, decreasing, convex, concave, and points of stationarity and of inflexion. (12)

(क) x : $|\frac{1}{2}x + 4| = |4x - 6|$ को हल कीजिये।

(ख) $g(x) = x^2e^{-x}$ का ग्राफ बनाने के लिए डोमेन, अनंतस्पर्शी, प्रथम तथा द्वितीय व्युत्पन्न ज्ञात कीजिए। (12)

दृष्टिबाधित परीक्षार्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

(ख) $g(x) = x^2e^{-x}$ का डोमेन, श्रेणी, अनंतस्पर्शी, पहला और दूसरा व्युत्पन्न निर्धारित कीजिये और बताइए कि फलन कहाँ बढ़ रहा है, कहाँ घट रहा है, कहाँ उत्तल है, कहाँ अवतल है और स्थिरता और विक्षेपण के बिंदु कहां हैं। (12)