

[This question paper contains 8 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 6491

J

Unique Paper Code : 2272101202

Name of the Paper : Intermediate Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics, DSC

Semester : III

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any **nine** questions.
3. All questions carry equal marks.
4. The use of a simple calculator is allowed.
5. The questions meant for PWD category must be attempted by the PWD category only.
6. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. किन्हीं 9 प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
3. सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
4. साधारण कैलकुलेटर उपयोग की अनुमति है।
5. दिव्यांग श्रेणी के लिए निर्धारित प्रश्नों को केवल दिव्यांग श्रेणी के व्यक्तियों द्वारा ही हल किया जाना चाहिए।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

P.T.O.

1. (a) Let A be an $n \times n$ matrix. Suppose that A has a real eigenvalue $\lambda > 0$. Find the eigenvalues of the matrices $A + I$ and $A^2 + I$ where I is an $n \times n$ identity matrix. (5)
- (b) Let a 3×3 matrix A has eigenvalues equal to 2, 3 and 1. Is the matrix invertible? Explain. If it is invertible, find the eigenvalues of A^{-1} . (5)
2. (a) A demand function is given by $x = 15y^2 + 5y^3p^{-3} - 6p^3$, where $y > 0$, $p > 0$ and p is price, x is quantity and y is income.
 - (i) Is the demand curve negatively sloped?
 - (ii) Is the given commodity normal good?
 - (iii) Find the reaction of demand to price as income increases and the reaction of demand to income as price increases. (6)
- (b). Determine the domain and plot it for the following function

$$F(x, y) = \sqrt{5-x} + \sqrt{y-2} \quad (4)$$

ALTERNATIVE QUESTION FOR PWD CANDIDATES

Find the rank of the following matrix for various values of p and q : (4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (a) Suppose the demand $D(P, r)$ for a certain commodity depends on its price P and interest rate r . What signs should one expect for the partial derivatives of D w.r.t. P and r to have? Suppose the supply is $S(p)$, so that in equilibrium $D(P, r) = S(p)$. Differentiate implicitly to find $\frac{dP}{dr}$, and comment on its sign. (5)

- (b) Find a linear approximation of the function $f(x, y) = \frac{1}{1+x-y}$ at (2,1). (5)
4. (a) When is a square matrix diagonalizable? Explain. (4)
- (b) For the following 2×2 matrix, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; Find A^{30} . (6)
5. A monopolist supplies to two markets, one at home and the other abroad. The demand functions are :
- $$q_1 = 100 - p_1, \text{ and}$$
- $$q_2 = 80 - p_2.$$
- Where q_1 and q_2 denote the home and foreign sales, respectively. The firm's total cost function is given by :
- $$C = (q_1 + q_2)^2.$$
- (a) Write down the profit expression of the monopolist and find the optimal outputs and prices so that profit is maximised. Check the second-order sufficient conditions as well. (6)
- (b) What happens to price if the monopolist is not allowed to discriminate between home and foreign customers? (4)
6. Without using differentiation, examine if the following functions defined for $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ are quasiconcave or quasiconvex. Also check the functions for concavity and convexity.
- (a) $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$
- (b) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^{1/2} x_2^{1/4}$ (5×2=10)

7. (a) State Euler's Theorem. For the following functions, determine the degree of homogeneity. Also, check if the functions are homothetic.

(i) $z = \ln x^2 + \ln xy$

(ii) $z = e^{\ln(x^2+xy)}$ (5)

- (b) The function F is defined for all x and y by $F(x,y) = xe^{y-3} + xy^2 - 2y$. Show that the point $(1,3)$ lies on the level curve $F(x,y) = 4$. And find the equation of the tangent line to the curve at the point $(1,3)$. (5)

8. (a) Consider the function $f(x,y)$ defined for all x and y as

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - x + ay(x-1) - \frac{1}{3}y^3 + a^2y^2, \text{ where } a \text{ is a constant.}$$

Find out the subset of xy -plane where $f(x,y)$ is convex. (5)

- (b) Suppose that $f(x) = e^{-x^2}$ and $F(u) = \ln u$. Explain why $f(x)$ has a maximum at $x = 0$ if and only if $g(x) = F(f(x))$ has a maximum at $x = 0$.

How does your answer change if $F(u) = 5$. (5)

9. (a) Plot the domain of the function $F(x,y) = \frac{1}{x-y}$.

Further, determine if the domain is open, closed, or neither. Is the domain bounded? (5)

ALTERNATIVE QUESTION FOR PWD CANDIDATES

Consider an $n \times n$ matrix A that is diagonalizable so that there exists an $n \times n$ invertible matrix P and a diagonal matrix, B such that

$$P^{-1}AP = B$$

Prove that A and B have same eigenvalues. (5)

(b) Examine graphically or otherwise if the following sets are convex or not:

(i) $S = \{(x, y): 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

(ii) $T = \{(x, y): \ln x + \ln y \leq 0, x > 0, y > 0\}$ (5)

ALTERNATIVE QUESTION FOR PWD CANDIDATES

Discuss the solutions of the following system of linear equations

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$-x + py - 21z = 3$$

$$3x + 7y + pz = q$$

for various values of p and q . There is no need to find the solution. (5)

10. (a) Consider four linearly independent vectors u, v, w and $x \in \mathbb{R}^4$. Are the vectors $(u + v), (v + w), (w + 2u)$, and $(-2v + u)$ linearly independent or dependent?

What can you say about the vectors $(u + v), (v + w), (w + 2u), (-2v + u)$ and $(x + u)$? Explain. (5)

- (b) Prove that a sufficient condition for a square matrix A of order n to be orthogonal is that all its column vectors are unit vectors and mutually orthogonal. (5)

- 1 (क) मान लीजिए A एक $n \times n$ मैट्रिक्स है। मान लीजिए कि A का वास्तविक आइजेनवैल्यू $\lambda > 0$ है। मैट्रिसेस $A + I$ और $A^2 + I$ की आइजेनवैल्यू ज्ञात कीजिए जहाँ, I एक $n \times n$ आइडेंटिटी मैट्रिक्स है। (5)

- (ख) मान लीजिए 3×3 मैट्रिक्स A के आइजेनवैल्यू 2, 3 और 1 के बराबर हैं। क्या मैट्रिक्स व्युत्क्रमणीय है? स्पष्ट कीजिए। यदि यह व्युत्क्रमणीय है, तो A^{-1} की आइजेनवैल्यू ज्ञात कीजिए। (5)

- 2 (क) मांग फलन $x = 15y^2 + 5y^3p^{-3} - 6p^3$ द्वारा दर्शाया गया है, जहाँ $y > 0, p > 0$ और p कीमत है, x मात्रा है और y आय है।

(i) क्या मांग वक्र ऋणात्मक ढलान वाला है?

(ii) क्या दी गई वस्तु सामान्य वस्तु है?

(iii) आय में वृद्धि होने पर कीमत के प्रति मांग की प्रतिक्रिया तथा कीमत में वृद्धि होने पर आय के प्रति मांग की प्रतिक्रिया ज्ञात कीजिए। (6)

(ख) डोमेन निर्धारित कीजिए और इसे निम्नलिखित फलन में इसे प्लॉट कीजिए

$$F(x, y) = \sqrt{5-x} + \sqrt{y-2} \quad (4)$$

दिव्यांग उम्मीदवारों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

p और q के विभिन्न मानों के लिए निम्नलिखित मैट्रिक्स की रैंक ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

3 (क) मान लीजिए किसी निश्चित वस्तु की मांग $D(P, r)$ उसकी कीमत P और ब्याज दर r पर निर्भर करती है। P और r के संबंध में D के आंशिक व्युत्पन्नों के लिए कौन-से चिन्हों की अपेक्षा करनी

चाहिए? मान लीजिए आपूर्ति $S(p)$ है, तो संतुलन $D(P, r) = S(p)$ होगा। $\frac{dp}{dr}$ ज्ञात करने के लिए अंतर्निहित रूप से विभेदन कीजिए, तथा इसके चिह्न पर टिप्पणी कीजिए। (5)

(ख) फलन $f(x, y) = \frac{1}{1+x-y}$ at $(2, 1)$ का रैखिक सन्निकटन ज्ञात करें। (5)

4 (क) एक स्ववायर मैट्रिक्स कब विकर्णीय होता है? स्पष्ट कीजिए। (4)

(ख) निम्नलिखित 2×2 मैट्रिक्स के लिए, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; A^{30} ज्ञात कीजिए। (6)

5. एक एकाधिकारवादी दो बाजारों में आपूर्ति करता है, एक घरेलू और दूसरा विदेशी। मांग फलन इस प्रकार हैं :

$$q_1 = 100 - p_1, \text{ और}$$

$$q_2 = 80 - p_2$$

जहाँ q_1 और q_2 क्रमशः घरेलू और विदेशी बिक्री को दर्शाते हैं। फर्म का कुल लागत फलन इस प्रकार दिया गया है :

$$C = (q_1 + q_2)^2$$

(क) एकाधिकारवादी की लाभ अभिव्यक्ति लिखिए तथा इष्टतम आउटपुट और कीमतें ज्ञात कीजिए ताकि लाभ अधिकतम हो सके। दूसरे क्रम की पर्याप्त शर्तों की भी जाँच कीजिए। (6)

(ख) यदि एकाधिकारवादी को घरेलू और विदेशी ग्राहकों के बीच भेदभाव करने की अनुमति नहीं दी जाती तो कीमत पर क्या प्रभाव पड़ता है? (4)

6. अवकलन का उपयोग किए बिना, जाँच कीजिए कि $x_1 > 0, x_2 > 0$ के लिए परिभाषित निम्नलिखित फलन अर्धअवतल है या अर्धउत्तल हैं। अवतलता और उत्तलता के फलनों की भी जाँच कीजिए।

(क) $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$

(ख) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^{1/2} x_2^{1/4}$ (5×2=10)

7. (क) यूलर प्रमेय क्या होता है। निम्नलिखित फलनों के लिए, समरूपता की डिग्री निर्धारित कीजिए। इसके अलावा, यह भी जाँच कीजिए कि क्या फलन समरूप हैं।

(i) $z = \ln x^2 + \ln xy$

(ii) $z = e^{\ln(x^2+xy)}$ (5)

(ख) फलन F को सभी x और y के लिए $F(x, y) = xe^{y-3} + xy^2 - 2y$ द्वारा परिभाषित किया गया है। दर्शाइए कि बिन्दु $(1, 3)$ समतल वक्र $F(x, y) = 4$ पर स्थित है। और बिंदु $(1, 3)$ पर वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। (5)

8. (क) सभी x और y के लिए निम्नलिखित रूप में परिभाषित फलन $f(x, y)$ पर विचार कीजिए

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - x + ay(x-1) - \frac{1}{3}y^3 + a^2y^2, \text{ जहाँ } a \text{ स्थिरांक है।}$$

xy -तल का उपसमुच्चय ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x, y)$ उत्तल है। (5)

(ख) मान लीजिए कि $f(x) = e^{-x^2}$ और $F(u) = \ln u$ स्पष्ट कीजिए कि $f(x)$ का $x = 0$ पर अधिकतम मान क्यों होता है यदि और केवल यदि $g(x) = F(f(x))$ का $x = 0$ पर अधिकतम मान होता है। यदि $F(u) = 5$ है, तो आपका उत्तर किस प्रकार परिवर्तित होगा। (5)

9. (क) फलन $F(x, y) = \frac{1}{x-y}$ का डोमेन प्लॉट कीजिए।

इसके अलावा, यह निर्धारित कीजिए कि डोमेन खुला है, या बंद है या दोनों में से कोई भी नहीं है। क्या डोमेन बाउंडेड है? (5)

दिव्यांग उम्मीदवारों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

एक $n \times n$ मैट्रिक्स A पर विचार कीजिए जो विकर्णीय है ताकि एक $n \times n$ व्युत्क्रमणीय मैट्रिक्स P और एक विकर्ण मैट्रिक्स, B मौजूद हो जैसे कि

$$P^{-1}AP = B$$

तो सिद्ध कीजिए कि A और B की आइजेनवैल्यू समान है। (5)

(ख) ग्राफिक रूप से या अन्यथा जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सेट उत्तल हैं या नहीं:

(i) $S = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

(ii) $T = \{(x, y) : \ln x + \ln y \leq 0, x > 0, y > 0\}$ (5)

दिव्यांग उम्मीदवारों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

निम्नलिखित रैखिक समीकरण प्रणाली के समाधानों पर चर्चा कीजिए:

$$x + 2y + 3z = 11$$

$$-x + py - 21z = 3$$

$$3x + 7y + pz = q$$

p और q के विभिन्न मानों के लिए। इसके लिए हल खोजने की आवश्यकता नहीं है। (5)

10. (क) चार रैखिकतः स्वतंत्र सदिशों u, v, w और $x \in \mathbb{R}^4$ पर विचार कीजिए। क्या सदिश $(u + v), (v + w), (w + 2u)$, और $(-2v + u)$ रैखिकतः स्वतंत्र या आश्रित हैं?

आप सदिशों $(u + v), (v + w), (w + 2u), (-2v + u)$ और $(x + u)$ के बारे में क्या कह सकते हैं? स्पष्ट कीजिए। (5)

(ख) सिद्ध कीजिए कि क्रम n वाले स्क्वायर मैट्रिक्स A के ऑर्थोगोनल होने के लिए पर्याप्त शर्त यह है कि इसके सदिश के सभी स्तम्भ की यूनिट सदिश हों तथा परस्पर ऑर्थोगोनल हों। (5)