(ii) Find the Bayesian equilibria. (10,10)

ऐसी स्थिति पर विचार कीजिए जिसमें प्लेयर 2 को पता है कि (नीचे दिये गये A या B में से) कौन सा खेल खेला जा रहा है। लेकिन प्लेयर 1 को केवल इतना पता है कि A, p प्रायिकता के साथ खेला जा रहा है और खेल B, 1−p प्रायिकता के साथ खेला जा रहा है।

A

		Player 2	
		S	*B*
Player 1	*S*	2,2	1,0
	B	1,5	0,2

B

		Player 2	
		S	*B*
Player 1	*S*	2,2	0,5
	B	0,0	4,2

(i) स्थिति का वर्णन बायेसियन खेल (ayesian game) के रूप में कीजिए। अर्थात खिलाड़ियों के समूह, उनके प्रकार, रणनीतियों के समूह, उनकी मान्यताओं और उनके भुगतान का वर्णन कीजिए।

(ii) बायेसियन संतुलन (Bayesian equilibria) ज्ञात कीजिए।

[This question paper contains 16 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 1687 **I**

Unique Paper Code : 2272103501

Name of the Paper : Game Theory and Strategic Interactions

Name of the Course : **BA. (Hons.) Economics-DSC**

Semester : V

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are **two** sections in this paper, **Section A** and **Section B**.
3. Question in **Section A** is compulsory to attempt.
4. In **Section B**, there are **five** questions in all, attempt any **three** questions.
5. All parts of a question must be answered together.
6. Use of a simple calculator is allowed.

7. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. इस पेपर में **दो** खंड हैं, **खंड ए** और **खंड बी**।
3. **खंड ए** में प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
4. **खंड बी** में कुल **पाँच** प्रश्न हैं, कोई भी **तीन** प्रश्न हल करें।
5. प्रश्न के सभी भागों का उत्तर एक साथ दीजिए।
6. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग करने की अनुमति है।
7. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

Section A

1. (a) Consider the following game :

Player 1 \ Player 2	D	E
A	2,5	8,-1
B	4,-8	-2,-3
C	1,6	6,3

हैं, तो जिस व्यक्ति ने छोटी संख्या सोची है, उसे सोची गयी संख्या के बराबर मफिन मिलते हैं और दूसरे व्यक्ति को शेष मफिन मिलते हैं। यदि व्यक्तियों द्वारा सोची गई संख्याओं का योग 12 से अधिक है और समान संख्याएँ सोची हैं, तो प्रत्येक व्यक्ति को 6 मफिन मिलते हैं। दूसरे प्लेयर की प्रत्येक कार्रवाई के लिए प्रत्येक प्लेयर की सर्वोत्तम प्रतिक्रिया निर्धारित कीजिए। एक आरेख में खेल के नैश संतुलन का पता लगाइए।

6. Consider the situation in which player 2 knows what game is played (A or B below). But player 1 only knows that A is played with probability p and B is played with probability 1 - p.

A

Player 1 \ Player 2	S	B
S	2,2	1,0
B	1,5	0,2

B

Player 1 \ Player 2	S	B
S	2,2	0,5
B	0,0	4,2

(i) Describe the situation as a Bayesian game. That is, describe the set of players, their types, the set of strategies, their beliefs and their payoffs.

the numbers that the people called exceeds 12 and the numbers are the same, then each person receives 6 muffins each. Determine the best response of each player to each of the other player's actions. In a diagram find the Nash equilibria of the game. (15)

(क) प्रथम-मूल्य सीलबंद बोली (first-price sealed-bid) नीलामी खेल को परिभाषित कीजिए। मान लीजिए vi, प्लेयर i द्वारा वस्तु से जोड़े गए मूल्य को दर्शाता है और $v_1 > v_2 > v_3 > \ldots > v_n$ यह दर्शाता है कि प्रथम-मूल्य सीलबंद बोली नीलामी के नैश संतुलन में, दो उच्चतम बोलियाँ कम से कम v_2 और ज्यादा से ज्यादा v_1 है। यह भी दर्शाइए कि इन शर्तों को पूरा करने वाली कोई भी एक्शन प्रोफाइल एक नैश संतुलन है।

(ख) पूर्ण जानकारी के साथ किसी रणनीतिक खेल में, दो लोगों के पास आपस में बांटने के लिए मफिन के 12 टुकड़े हैं। वे निम्नलिखित प्रक्रिया का उपयोग करते हैं। प्रत्येक व्यक्ति 0 और 12 के बीच एक पूर्णांक सोचते हैं और यदि दो घोषित संख्याओं का योग अधिकतम 12 है, तो प्रत्येक को उनके द्वारा सोची गयी संख्या के बराबर मफिन मिलते हैं। यदि लोगों द्वारा सोची गयी संख्याओं का योग 12 से अधिक है और संख्याएँ भिन्न-भिन्न

(i) Write the best response function and show them in the diagram. Does the game has any pure strategy Nash Equilibrium?

(ii) Define the dominated actions. Are there any dominated actions of Player 1 and Player 2? Find mixed strategy Nash Equilibria for the above game, if any. (10,10)

(b) Suppose I prefer \$50 for sure over a lottery that pays \$200 with a probability of $\frac{1}{5}$ and \$0 with a probability of $\frac{4}{5}$. Also, suppose that I prefer lottery X to lottery Y, where lottery X pays \$200 with a probability of $\frac{1}{10}$ and \$0 with a probability of $\frac{9}{10}$ and lottery Y pays \$50 with a probability of $\frac{3}{5}$ and \$0 with a probability of $\frac{2}{5}$.

(i) Is there a utility function over money that is consistent with my preferences?

(ii) If so, describe such a utility function. If not, explain why. (5,5)

(क) निम्नलिखित खेल पर विचार कीजिए :

प्लेयर 1 / Player 1	प्लेयर 2 / Player 2 D	E
A	2,5	8,-1
B	4,-8	-2,-3
C	1,6	6,3

(i) सर्वोत्तम प्रतिक्रिया फंक्शन (response function) लिखिए और उन्हें आरेख (diagram) में दर्शाइए। क्या गेम में कोई शुद्ध रणनीति नैश संतुलन (pure strategy Nash Equilibrium) है?

(ii) वर्चस्व वाले कार्यों (dominated actions) को परिभाषित कीजिए। क्या प्लेयर 1 और प्लेयर 2 का कोई वर्चस्व वाला कार्य है? उपरोक्त खेल के लिए मिश्रित रणनीति संतुलन (mixed strategy Nash Equilibria) यदि कोई हो, का पता लगाइए।

(ख) मान लीजिए कि मैं \$200 की किसी लॉटरी, जिसमें लॉटरी मिलने की $\frac{1}{5}$ की और \$0 होने की $\frac{4}{5}$ की संभावना है, की तुलना में, निश्चित मिलने वाले \$50 को प्राथमिकता देता हूँ। साथ ही, मान लीजिए कि मैं लॉटरी Y जिसमें \$50 मिलने की $\frac{3}{5}$ की और

(iii) खेल के बायेसियन नैश संतुलन (Bayesian Nash Equilibrium) की गणना कीजिए।

5. (a) Define first-price sealed-bid auctions game. Suppose vi denotes value player i attaches to the object and $v_1 > v_2 > v_3 > \ldots > v_n$. Show that in a Nash equilibrium of a first- price sealed-bid auction, the two highest bid is at least v_2 and at most v_1. Show also that any action profile satisfying these conditions is a Nash equilibrium. (5)

(b) In a strategic game with perfect information, two people have 12 pieces of muffins to divide between themselves. They use the following procedure. Each person names an integer between 0 and 12 and if the sum total of the two announced numbers is at most 12 then each get muffins equal to the number they had called. If the sum of the numbers that the people announced exceeds 12 and the numbers are different then the person who named the smaller number receives the number of muffins equal to the announced number and the other person gets the remaining muffins. If the sum of

मूल्य प्रस्ताव को स्वीकार (A) करना है या अस्वीकार (R), जबकि विक्रेता अपनी लागत का प्रकार बताए बिना अधिक मूल्य (HP) या कम मूल्य (LP) के संबंध में निर्णय लेता है। यदि क्रेता उच्च मूल्य प्रस्ताव स्वीकार करता है, तो भुगतान इस प्रकार हैंरू यदि इनकी लागत अधिक है, तो विक्रेता के लिए यह 3 है, यदि इनकी लागत कम हैं, तो यह 5 और क्रेता के लिए –2 है। यदि क्रेता कम कीमत का प्रस्ताव स्वीकार करता है, तो भुगतान इस प्रकार हैंरू यदि इनकी लागत अधिक हैं, तो विक्रेता के लिए 2 है, यदि इनकी लागत कम हैं, तो यह 4 है और क्रेता के लिए 2 है।

यदि क्रेता किसी भी कीमत को अस्वीकार कर देता है, तो दोनों प्लेयर्स को 0 का भुगतान प्राप्त होता है।

(i) प्रत्येक प्लेयर के लिए उपयुक्त प्रकार और रणनीतियों के साथ बायेसियन गेम (Bayesian game) की स्थापना कीजिए और गेम ट्री का निरुपण कीजिए।

(ii) रणनीतियों और प्रकारों के प्रत्येक संयोजन (each combination of strategies and types) के लिए पेऑफ को दर्शाते हुए बायेसियन गेम पेऑफ मैट्रिक्स (Bayesian game payoff matrix) का निर्माण कीजिए।

$0 होने की $\frac{2}{5}$ की संभावना है, की तुलना में लॉटरी X को प्राथमिकता देता हूँ, जिसमें $200 मिलने की $\frac{1}{10}$ और $0 मिलने की $\frac{9}{10}$ संभावना है।

(i) क्या धन पर कोई उपयोगिता फलन (utility function) है जो मेरी प्राथमिकताओं के अनुरूप है?

(ii) यदि हाँ, तो ऐसे उपयोगिता फलन का वर्णन कीजिए। यदि नहीं, तो क्यों?

Section B

2. Consider a Cournot duopoly which operates in a market with the following inverse demand function

$$P(Q)=\begin{cases}60-Q \text{ if } Q\le 60\\ 0 \text{ if } Q>60\end{cases}$$

where $Q = q_1 + q_2$ is the total output in the market. The cost of firm 2 is $c_2(q_2) = 12q_2$ with probability 1/4 and $c_2(q_2) = 24q_2$ with probability 3/4. The cost of firm 1 is $c_1(q_1) = 18q_1$. Firm 2 knows its own cost, but firm 1 only knows the types of costs of firm 2 and its

probabilities. The above description is common knowledge. Each firm chooses output to maximize its profit.

(i) Represent the above situation as a Bayesian Game. That is, describe the set of players, their types, the set of strategies, their beliefs and their profits.

(ii) Compute the Bayesian Equilibrium and the profits of the firms in this equilibrium.

(iii) Suppose now that firm 1 knows that the costs of firm 2 is $c_2(q_2) = 12q_2$. Compute the Nash equilibrium and the profits of the firms in this equilibrium.

(iv) Suppose now that firm 1 knows that the costs of firm 2 is $c_2(q_2) = 24q_2$. Compute the Nash equilibrium and the profits of the firms in this equilibrium.

(v) In view of the above computation there is one type of firm 2 which prefers complete information and one type that prefers the situation with incomplete information. Identify those types. (5,5,4,4,2)

are Low Cost, and -2 for the Buyer. If the Buyer accepts a Low Price offer, the payoffs are: 2 for the Seller if High Cost, 4 if Low Cost, and 2 for the Buyer.

If the Buyer rejects any price, both players receive a payoff of 0.

(i) Set up the Bayesian game with appropriate types and strategies for each player and represent the game tree.

(ii) Construct the Bayesian game payoff matrix, indicating payoffs for each combination of strategies and types.

(iii) Compute the Bayesian Nash Equilibrium of the game. (7,7,6)

किसी उत्पाद की कीमत को लेकर क्रेता और विक्रेता के बीच सौदेबाजी के खेल पर विचार कीजिए। क्रेता विक्रेता की कीमत के बारे में अनिश्चित है, जो या तो अधिक (H) या कम (L) हो सकती है। विक्रेता की लागत अधिक होने की संभावना 0.4 है, और लागत कम होने की संभावना 0.6 है। क्रेता को यह तय करना है कि विक्रेता के

(i) दोनों ही खिलाड़ियों के लिए रणनीतियों का समूह ज्ञात कीजिए।

(ii) पश्च प्रेरण (backward induction) का उपयोग करते हुए खेल का उप-खेल पूर्ण संतुलन (संतुलन) (sub game perfect equilibrium (equilibria)) ज्ञात कीजिए।

(iii) इस विस्तृत खेल का सामान्य रूप निरूपण (normal form representation) बनाइए और सभी नैश संतुलन को ज्ञात कीजिए। खेल के कौन से नैश संतुलन उप खेल पूर्ण (sub game perfect) हैं? अपना उत्तर स्पष्ट कीजिए।

4. Consider a negotiation game between a Buyer and a Seller over the price of a product. The Buyer is uncertain about the Seller's cost, which can either be High (H) or Low (L). The probability that the Seller has a High Cost is 0.4, and the probability of Low Cost is 0.6. The Buyer must decide whether to Accept (A) or Reject (R) the Seller's price offer, while the Seller decides on a High Price (HP) or a Low Price (LP) without revealing their cost type. If the Buyer accepts a High Price offer, the payoffs are: 3 for the Seller if they are High Cost, 5 if they

किसी कौरनो द्ववैधाधिकार (Cournot duopoly) पर विचार कीजिए, जो निम्नलिखित व्युत्क्रम मांग फलन (inverse demand function) वाले बाजार में कार्य करती है

$$P(Q)=\begin{cases}60-Q \text{ if } Q\le 60\\ 0 \text{ if } Q>60\end{cases}$$

जहाँ $Q = q_1 + q_2$ बाजार में कुल उत्पादन है। फर्म 2 की लागत 1/4 की संभावना के साथ और 3/4 की संभावना के साथ $c_2(q_2) = 24q_2$ है। फर्म 1 की लागत $c_1(q_1) = 18q_1$ है। फर्म 2 को अपनी लागत का पता है, लेकिन फर्म 1 को केवल फर्म 2 की लागतों के प्रकार और उसकी संभावनाओं के बारे में ही पता है। उपरोक्त विवरण सामान्य जानकारी है। प्रत्येक फर्म अपने अधिकतम लाभ के लिए उत्पादन करना चुनती हैं।

(i) उपरोक्त स्थिति को बायेसियन गेम (Bayesian Game) के रूप में प्रस्तुत कीजिए। अर्थात, खिलाड़ियों का समूह, उनका प्रकार, रणनीतियों का समूह, उनकी मान्यताएं और उनके लाभों का वर्णन कीजिए।

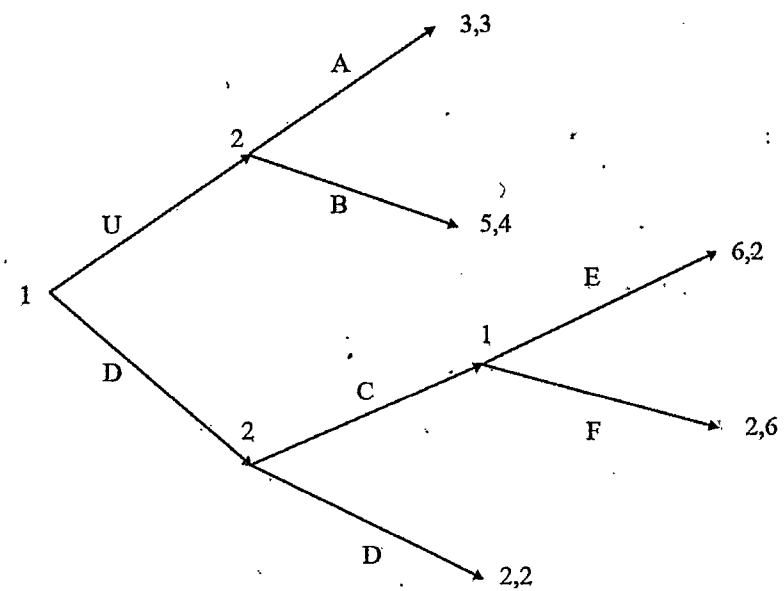
(ii) बायेसियन संतुलन (Bayesian Equilibrium) की गणना कीजिए और इस संतुलन में फर्मों के लाभ की गणना कीजिए ।

(iii) मान लीजिए अब फर्म 1 जानती है कि फर्म 2 की लागत $c_2(q_2) = 12q_2$ है। नैश संतुलन (Nash equilibrium) की गणना कीजिए और इस संतुलन में फर्मों के लाभ की गणना कीजिए।

(iv) मान लीजिए अब फर्म 1 जानती है कि फर्म 2 की लागत $c_2(q_2) = 24q_2$ है। नैश संतुलन (Nash equilibrium) की गणना कीजिए और इस संतुलन में फ़र्मों के लाभ की गणना कीजिए।

(v) उपरोक्त गणना के आधार पर एक प्रकार की फर्म 2 है जो संपूर्ण जानकारी को प्राथमिकता देती है और एक प्रकार की फर्म है जो अधूरी जानकारी वाली स्थिति को प्राथमिकता देती है। इन प्रकारों की पहचान कीजिए।

3. For the following extensive form game :



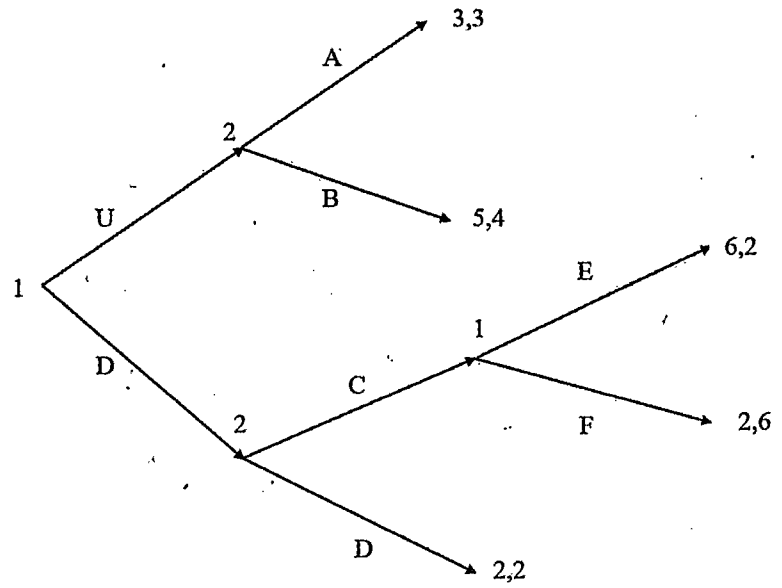
(i) Find the set of strategies for both the players.

(ii) Find the sub game perfect equilibrium (equilibria) of the game using backward induction.

(iii) Draw the normal form representation of this extensive game and find all the Nash equilibria. Which of the Nash equilibria of the game are sub game perfect? Explain your answer.

(5,5,10)

निम्नलिखित विस्तृत प्रारूप खेल (extensive form game) के लिए :



P.T.O.