(ख) सरकार के राजस्व R(t) और सरकार के व्यय G(t), दोनों को समय 't' वर्षों में के फलन के रूप में निम्नलिखित द्वारा दर्शाया गया है :

$R(t) = 100t - t^2$ and $G(t) = 50t + 10$

(i) समय 't' के संदर्भ में अधिशेष $B(t) = R(t) - G(t)$ के परिवर्तन की दर को ज्ञात कीजिए।

(ii) 't' का सकारात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बजट अधिशेष के परिवर्तन की आनुपातिक दर सरकारी व्यय के परिवर्तन की आनुपातिक दर के समान है।

[This question paper contains 12 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 2101 **I**

Unique Paper Code : 2272101102

Name of the Paper : Introductory Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : I – DSC

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. The use of scientific calculator is allowed.
3. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. वैज्ञानिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।
3. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

P.T.O.

Attempt any **nine** questions : (9×10=90)

1. (a) Find the equation of the tangent line to the graph of $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ at the point $(-1, 1)$.

   (b) Estimate the maximum error when approximating $f(x) = \sqrt{x}$ with a second order Taylor polynomial about $x = 4$ in the interval $[4,4.2]$. (5+5)

   (क) आलेख $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ पर बिंदु $(-1, 1)$ के लिए स्पर्शरेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (ख) अंतराल $[4,4.2]$ में $x = 4$ के बारे में द्वितीय क्रम टेलर बहुपद के साथ $f(x) = \sqrt{x}$ के सन्निकटन मान के लिए अधिकतम त्रुटि का अनुमान लगाएं।

2. (a) Consider the function $f(x) = 3^x$, prove that for all real numbers x_1, x_2

$$\frac{3^{x_1} + 3^{x_2}}{2} \geq 3^{\frac{x_1 + x_2}{2}}.$$

   (b) Is the statement "$3x \to 7$ as $x \to 1$" true? Using the $\varepsilon\delta$ definition of limits, justify your answer. (5+5)

   (ख) दिए गए फलन $f(x) = x^3 + cx + 1$ में इस फलन के लिए c के विभिन्न मानों के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ को परिभाषित कीजिए।

10. (a) Determine values of x in domain where $H(x) = (x^2 - 1)e^{(2-x^2)}$ is strictly increasing and strictly decreasing.

    (b) The Government revenue R(t) and government spending G(t), both as functions of time 't' in years, are given by :

    $R(t) = 100t - t^2$ and $G(t) = 50t + 10$

    (i) Find the rate of change of the budget surplus $B(t) = R(t) - G(t)$ with respect to time 't'.

    (ii) Determine the positive value of 't' for which the proportional rate of change of the budget surplus equals the proportional rate of change of Government spending. (5+5)

    (क) ऐसे क्षेत्र में x का मान ज्ञात कीजिए जहां $H(x) = (x^2 - 1)e^{(2-x^2)}$ निश्चित रूप से बढ़ता है और निश्चित रूप से घटता है।

(क) यदि जनसंख्या A में समय के साथ तेजी से वृद्धि हो रही है और A_1, A_2 क्रमशः समय t_1 और t_2 के मान हैं, तो A_1, A_2, t_1, t_2 के संदर्भ में जनसंख्या की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

(ख) यदि रेखा P बिंदु (2, –1) से गुजरती है और इसका ढलान –5 है। दूसरी रेखा Q बिंदु (–2, 3) और (4, –3) से गुजरती है, तो रेखा P और Q का समीकरण ज्ञात कीजिए। और इनके प्रतिच्छेदन बिंदु R को ज्ञात कीजिए। रेखा S का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (3, 4) से गुजरती है जो रेखा फ के समांतर है।

9. (a) Let a, b, m and n be fixed numbers, where $a < b$ and m and n are positive. Define the function g for all x by $g(x) = (b - x)^m (x - a)^n$. For the equation $g'(x) = 0$, find a solution x_0 that lies between a and b.

(b) Given the function $f(x) = x^3 + cx + 1$, identify the local extrema of this function for different values of c. (5+5)

(क) मान लीजिए a, b, m और n स्थिरांक हैं, जहां $a < b$ और m और n धनात्मक हैं। $g(x) = (b - x)^m (x - a)^n$ द्वारा सभी x के लिए फलन g को परिभाषित कीजिए। समीकरण $g'(x) = 0$ के लिए समाधान ज्ञात कीजिए x_0 जो कि a और b के बीच में स्थित है।

(क) Consider the function फलन $f(x) = 3^x$, पर विचार कीजिए और सिद्ध कीजिए कि सभी वास्तविक संख्याओं x_1, x_2 के लिए, $\frac{3^{x_1} + 3^{x_2}}{2} \geq 3^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$ है।

(ख) क्या कथन "$3x \to 7$, $x \to 1$ के रूप में" सत्य हैं? $\varepsilon\delta$ सीमाओं की परिभाषा का प्रयोग करते हुए अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

3. (a) Suppose that a function f(x) is convex. Show the restrictions on parameters "a" and "b" that will guarantee that $g(x) = af(x) + b$ is also convex even if f is not differentiable.

(b) Solve the following equation for x (5+5)

$1 + 2 \log_4(x + 1) = 2\log_2 x$

(क) मान लीजिए कि एक फलन f(x) उत्तल फलन है। प्राचल "a" और "b" पर प्रतिबंध दर्शाएं जो यह सुनिश्चित करे कि $g(x) = af(x) + b$ भी उत्तल फलन है, भले ही f अवकलनीय न हो।

(ख) x के लिए निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

$$1 + 2\log_4(x+1) = 2\log_2 x$$

4. Let a and b be numbers, with $0 < a < b < 1$. Define the function f by

$$f(x) = b^x - a^x \text{ for } x \in [0, \infty).$$

(i) Does the extreme value theorem guarantee the existence of maximum and minimum for this function?

(ii) Find the value of x that minimizes f(x) on this interval and find the minimum value.

(iii) Show that this function has a single stationary point x* at which

$$\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

(iv) Without calculating the value of x*, show that the function attains a maximum at x* by signing the first derivative around it. (10)

(b) What value of the constant c allows the function $e^{-x}\sqrt{1+cx}$ to be approximated around $x = 0$ by a horizontal straight line? (5+5)

(क) स्थिरांक A और B के सभी मान ज्ञात कीजिए ताकि x के सभी मानों के लिए निम्नलिखित फलन सतत हो :

$$f(x) = \begin{cases} Ax - B, & if\ x \le -1 \\ 2x^2 + 3Ax + B, & if\ -1 < x \le 1 \\ 4, & if\ x > 1 \end{cases}$$

(ख) स्थिरांक c का कौन-सा मान क्षैतिज सीधी रेखा द्वारा फलन $e^{-x}\sqrt{1+cx}$ के $x = 0$ के सन्निकटन होगा?

8. (a) If population A is growing exponentially over the time and A_1, A_2 are the values at Time 't_1' and 't_2' respectively, then find the growth rate of population in terms of A_1, A_2, t_1, t_2.

(b) A line P passes through the point (2, –1) and has a slope of –5. A second line Q passes through the points (–2, 3) and (4, –3). Find the equations for the lines P and Q. Find their point of intersection R. Determine the equation of the line S that passes through the point (3, 4) and is parallel to line Q. (5+5)

P.T.O.

(क) एक द्विघात लाभ फलन $\pi(x) = ax^2 + bx + c$, जहां x = आउटपुट है, जिसका निम्नलिखित पूर्वधारणाओं को प्रतिबिंबित करने के लिए प्रयोग किया जाता है :

(i) जब $x = 0$ होता है, तो लाभ ऋणात्मक होता है।

(ii) लाभ फलन पूर्णत: अवतल है।

(iii) अधिकतम लाभ आउटपुट स्तर $= x^* > 0$ पर प्राप्त होता है।

उपर्युक्त पूर्वधारणाओं को पूरा करने के लिए स्थिरांक a, b और c के मानों पर किन प्रतिबंधों की आवश्यकता है?

(ख) p के किन मानों के लिए निम्नलिखित असमानता पूर्ण होती है?

$$\frac{3p-4}{p+2} > 4-p$$

7. (a) Determine all values of the constants A and B so that the following function is continuous for all values of x :

$$f(x) = \begin{cases} Ax - B, & if\ x \le -1 \\ 2x^2 + 3Ax + B, & if\ -1 < x \le 1 \\ 4, & if\ x > 1 \end{cases}$$

मान लीजिए कि a और b संख्याएं हैं, जिसमें $0 < a < b < 1$. $x \in [0, \infty)$ के लिए $f(x) = b^x - a^x$ द्वारा फलन f को परिभाषित कीजिए।

(i) क्या चरम मान प्रमेय इस फलन के लिए अधिकतम तथा न्यूनतम के अस्तित्व की गारंटी देता है?

(ii) इस अंतराल पर f(x) को न्यूनतम करने वाले x का मान ज्ञात कीजिए और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

(iii) इस फलन में यह दर्शाएं कि इसमें एक स्थिर बिंदु x^* है जिस पर $\left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ है।

(iv) x^* के मान की गणना किए बिना यह दर्शाएं कि यह फलन प्रथम व्युत्पन्न के संकेत (साइनिंग) द्वारा यह अपने निकट x^* का अधिकतम मान प्राप्त करता है।

5. (a) Let f(x) be a continuous function on [0,1]. Show that if $-1 \le f(x) \le 1$ for all $x \in [0,1]$, then there exists a $c \in [0,1]$ such that $[f(c)]^2 = c$.

(b) A student chooses the number of hours $x \ge 0$ to attend tuition. The cost of x hours of tuition is c(x), where c is a differentiable convex function.

She wishes to maximize $(x) = g[\pi(x)] - c(x)$, where $\pi(x)$ is her probability of passing when she attends x hours of tuition. Assume that π is a differentiable concave function, and g is an increasing, differentiable and concave function.

(i) Write down the first order condition for an interior solution $x^* > 0$ of this problem.

(ii) Is the interior solution necessarily solving the maximization problem? Why or why not.

(5+5)

(क) मान लीजिए कि f(x), [0,1] पर सतत फलन है। यह दर्शाएं कि यदि $-1 \leq f(x) \leq 1$ सभी $x \in [0,1]$ के लिए है, तो वहां पर $c \in [0,1]$ होता है जैसे कि $[f(c)]^2 = c$.

(ख) एक छात्रा टयुशन जाने के लिए $x \geq 0$ घंटों की संख्या के लिए चुनती है। टयुशन के x घंटों की लागत c(x) है, जहां c एक अवकलनीय उत्तल फलन है। वह अधिकतम $(x) = g[\pi(x)] - c(x)$ करना चाहती है, जहां वह x घंटों के लिए टयुशन जाती है तो उसके उत्तीर्ण होने की संभावना $\pi(x)$ है। मान लीजिए कि π एक अवकलनीय अवतल फलन है और g एक बढ़ता हुआ, अवकलनीय और अवतल फलन है।

(i) इस प्रश्न के आंतरिक समाधान $x^* > 0$ के लिए प्रथम क्रम की स्थिति लिखिए।

(ii) क्या आंतरिक समाधान निश्चित रूप से अधिकतमकरण समस्या को हल करता है? क्यों या क्यों नहीं।

6. (a) A quadratic profit function $\pi(x) = ax^2 + bx + c$, where x = output, is used to reflect the following assumptions :

(i) When x = 0, profits are negative.

(ii) The profit function is strictly concave.

(iii) The maximum profits occur at output level $= x^* > 0$.

What restrictions need to be placed on values of the constants a, b and c to fulfil the above-mentioned assumptions?

(b) For what values of p is the following inequality satisfied?

$$\frac{3p-4}{p+2} > 4-p$$

(5+5)