(क) किसी परिधान बुटीक का कुल लागत फलन और मांग फलन निम्नलिखित है :

$C = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 211Q + 500$ और $Q = 200 - P$

जहाँ C कुल लागत है, Q आउटपुट है, और P कीमत है।

इस फर्म के लिए उत्पादन का लाभ को अधिकतम करने का स्तर ज्ञात कीजिए।

(ख) सीमा $\lim_{x \to -8} \frac{x-8}{x^2-64}$ का मूल्यांकन कीजिए?

[This question paper contains 16 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 4590 **I**

Unique Paper Code : 2272202302

Name of the Paper : Optimization Methods for Economic Analysis

Name of the Course : **B.A. with Economics DSC**

Semester : III

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Attempt any **9** questions.
3. Each question carries **10** marks.
4. Use of a simple non-programmable calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. किन्हीं 9 प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
3. प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है ।
4. सामान्य गैर-प्रोग्रामिय कैलकुलेटर उपयोग की अनुमति है ।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

1. (a) Consider the following function :

$$y = \begin{cases} 2x \text{ if } 0 \le x < 2 \\ 1 \text{ if } 2 \le x < 4 \\ 6 \text{ if } 4 \le x < 6 \end{cases}$$

For the interval $x \in (0,6)$ discuss at what points the function is discontinuous.

(b) For the total cost function $TC = x^2 + 10x + 25$, show that :

(i) MC is less than AC when AC is falling

(क) संतुलन मूल्य और मात्रा (equilibrium price and quantity) ज्ञात कीजिए। β के संबंध में इनका आंशिक व्युत्पन्न (partial derivative) ज्ञात कीजिए। इस प्रकार प्राप्त संतुलन मूल्य व्युत्पन्न (equilibrium price derivative) के संकेत (sign) पर टिप्पणी कीजिए।

(ख) यह विश्लेषण करने के लिए, कि यदि α बढ़ता है तो संतुलन मांग किस प्रकार बढ़लेगी? आंशिक व्युत्पन्न का उपयोग कीजिए। अतिरिक्त ग्राफिकल विश्लेषण के साथ इसकी पुष्टि कीजिए।

10. (a) An apparel boutique has the following total cost function and demand function :

$$C = \frac{1}{3}Q^3 - 7Q^2 + 211Q + 500 \text{ and } Q = 200 - P$$

where C is the total cost, Q is the output, and P is the price.

Find the profit-maximising level of output for this firm.

(b) Evaluate the following limit : $\lim_{x \to -8} \frac{x-8}{x^2-64}$.

(8,2)

where Q is the quantity and P is the price. All the parameters γ, δ, α and β are positive.

(a) Derive the equilibrium price and quantity. Find the partial derivative of these with respect to β. Comment on the sign of the equilibrium price derivative thus obtained.

(b) Use partial derivatives to analyse how the equilibrium demand may change if a increases? Substantiate with an added graphical analysis.

(5,5)

रेफ्रिजरेटर के लिए एक बाजार में क्रमशः मांग और आपूर्ति का निम्नलिखित समीकरण (equations) हैं :

$$Q_D = \gamma - \delta P \text{ और } Q_S = \alpha + \beta p,$$

जहाँ Q मात्रा है और P कीमत है। सभी पैरामीटर γ, δ, α और β सकारात्मक हैं।

(ii) MC=AC at the point where AC curve is horizontal

(iii) MC exceeds AC where AC is rising

(4,6)

(क) निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए :

$$y = \begin{cases} 2x \text{ if } 0 \le x < 2 \\ 1 \text{ if } 2 \le x < 4 \\ 6 \text{ if } 4 \le x < 6 \end{cases}$$

अंतराल $x \in (0,6)$ के लिए यह बताइए कि किन बिंदुओं पर यह फलन असतत है।

(ख) कुल लागत फलन $TC = x^2 + 10x + 25$, के लिए, दर्शाइए कि :

(i) जब AC गिर रहा हो तो MC, AC से कम होता है।

(ii) जिस बिंदु पर AC वक्र क्षैतिज होता है वहां MC=AC है।

(iii) जहाँ AC बढ़ रहा हो तो MC, AC से अधिक होता है।

2. Let the national income model for a country be :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$

$$C = a + c(Y - T) \quad a > 0,\ 0 < c < 1$$

$$T = tY;\ 0 < t < 1 \text{ and } M = mY;\ 0 < m < 1$$

where Y is national income, C is (planned) consumption expenditure, I_0 is investment expenditure, G_0 is government expenditure, X_0 is exports, M is imports, and T is taxes.

(a) Derive the equilibrium income Y*.

(b) Examine the comparative static results with respect to government expenditure. Interpret its economic meaning and sign.

(c) Find out $\frac{\partial Y^*}{\partial t}$ and $\frac{\partial Y^*}{\partial m}$. Interpret their meanings and signs. (2,4,4)

(क) $C = 2000 + 0.9\,Y_d$, $Y_d = Y - T$ और $T = 300 + 0.2Y$ दिया गया है। जहाँ C = उपभोग, Y_d = प्रयोज्य आय (Disposable Income) और T = कर है।

सीमांत उपभोग प्रवृत्ति (Marginal Propensity to consume) (एमपीसी) ज्ञात कीजिए।

(ख) फलन $g(v) = v^6 + 10$ पर विचार कीजिए।

(i) इसका स्थिर (महत्वपूर्ण) मान (stationary (critical) अंसनम) ज्ञात कीजिए।

(ii) यह निर्धारित करने के लिए कि यह सापेक्ष अधिकतम या सापेक्ष न्यूनतम या विभक्ति बिंदु (relative maxima or relative minima or inflection point) को दर्शाता है, N^{th} व्युत्पन्न परीक्षण (derivative test) का उपयोग कीजिए।

9. A market for refrigerators has the following demand and supply equations, respectively :

$$Q_D = \gamma - \delta P \text{ and } Q_S = \alpha + \beta P,$$

इस तरह के सकल लागत फलन (total cost function) के गुणांकों (coefficients) को किन प्रतिबंधों (restrictions) को संतुष्ट करना चाहिए? ज्ञात कीजिए।

(ख) किसी प्रकाशन फर्म का सकल लागत फलन इस प्रकार है :

$$C = \frac{Q^3}{3} - 7Q^2 + 111Q + 50$$

क्या यह C(Q) फलन उपरोक्त (क) में व्युत्पन्न (derived) प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है?

8. (a) Given $C = 2000 + 0.9\ Y_d$, $Y_d = Y - T$ and $T = 300 + 0.2Y$ where C = Consumption, Y_d = Disposable Income and T = Taxes. Find the Marginal Propensity to consume (MPC).

(b) Consider the function $g(v) = v^6 + 10$.

(i) Find its stationary (critical) value.

(ii) Use N^{th} derivative test to determine whether it represents relative maxima or relative minima or inflection point. (4,6)

मान लीजिए किसी देश के लिए राष्ट्रीय आय मॉडल निम्नानुसार है :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$

$$C = a + c(Y - T)\ a > 0,\ 0 < c < 1$$

$$T = tY;\ 0 < t < 1 \text{ और } M = mY;\ 0 < m < 1$$

जहाँ Y राष्ट्रीय आय है, C (नियोजित) उपभोग व्यय है, I_0 निवेश व्यय है, G_0 सरकारी व्यय है, X_0 निर्यात है, M आयात है, और T कर है।

(क) संतुलन आय Y^* बताइए।

(ख) सरकारी व्यय के संबंध में तुलनात्मक स्थैतिक परिणामों (comparative static results) की जाँच कीजिए। इसके आर्थिक अर्थ और संकेत की व्याख्या कीजिए।

(ग) $\frac{\partial Y^*}{\partial t}$ और $\frac{\partial Y^*}{\partial m}$ ज्ञात कीजिए। इसके अर्थों और संकेतों की व्याख्या कीजिए।

3. (a) Consider an individual whose utility function is :

$$U = (x^p + y^p)^{1/p}$$

where $p < 1$ and x and y denote the consumption of clothing and food respectively. Using Lagrange-multiplier method, find out the optimal consumption bundle.

(b) For the function $= f(x) = \frac{x^2 - 10x + 24}{x - 6}$, examine its continuity at $x = 6$. (7,3)

(क) मान लीजिए किसी व्यक्ति का उपयोगिता फलन निम्न है :

$$U = (x^p + y^p)^{1/p}$$

जहाँ $p < 1$ है और x एवं y क्रमशः कपड़ों और भोजन की खपत को दर्शाते हैं। लैग्रेंज-गुणक विधि (Lagrange-multiplier method) का उपयोग करते हुए, इष्टतम उपभोग बंडल का पता लगाइए।

(ख) फलन $y = m^3 + 2m$, के लिए विभेदन के श्रृंखला नियम (chain rule of differentiation) का उपयोग करते हुए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए : जहां $m = 5 - x^2$ है।

7. (a) Consider a cubic total cost function $C = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$.

What restrictions should the coefficients of such a total cost function satisfy? Derive.

(b) A publishing firm has the following total cost function: $C = \frac{Q^3}{3} - 7Q^2 + 111Q + 50$.

Does this C(Q) function satisfy these restrictions derived in (a) above? (7,3)

(क) किसी घन सकल लागत फलन (cubic total cost function) $C = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$ पर विचार कीजिए।

6. (a) Consider the following production function:

$Y = (K(t) - \alpha)(L(t) - \beta)$ where $K(t) = K_0 + at$ and $L(t) = L_0$

where K(t) and L(t) denote the capital and labor stock respectively at time t, and K_0, L_0 and a are positive constants. Find out K'(t), L'(t) and the rate of change of output with respect to time.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$ using chain rule of differentiation for the function: $y = m^3 + 2m$, where $m = 5 - x^2$.

(6,4)

(क) निम्नलिखित उत्पादन फलन पर विचार कीजिए :

$Y = (K(t) - \alpha)(L(t) - \beta)$ जहाँ $K(t) = K_0 + at$ और $L(t) = L_0$ है।

जहां K(t) और L(t) क्रमशः समय t पर पूंजी और श्रम स्टॉक को दर्शाते हैं, और K_0, L_0 और a सकारात्मक स्थिरांक (positive constants) हैं। समय के संबंध में K'(t), L'(t) और आउटपुट के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(ख) फलन (function) $y = f(x) = \frac{x^2 - 10x + 24}{x - 6}$ के लिए $x = 6$ पर इसकी सातत्यता की जांच कीजिए।

4. (a) The demand function for fish in a market is given by $Q_F = 4850 - 5P_F + 1.5P_C + 0.1Y$, where Y= Income, P_F = Price of fish, P_C = Price of chicken. Given Y= income = 10000; $P_F = 200$ and $P_C = 100$.

(i) Calculate the income and cross-price elasticity of demand for fish. Give economic interpretation for both the elasticities you have computed.

(ii) What is the percentage change in the demand for fish due to 10% increase in the price of chicken?

(b) Determine whether the function $f(x,y) = \sqrt{xy}$ is homogeneous. If so, of what degree? (7,3)

P.T.O.

(क) किसी बाजार में मछली की मांग का फलन $Q_F = 4850 - 5P_F + 1.5P_C + 0.1Y$, द्वारा दिया गया है, जहाँ Y = आय, P_F = मछली की कीमत, P_C = चिकन की कीमत है। यदि Y = आय = 10000, P_F = 200 और P_C = 100 दिया गया है, तो :-

(i) मछली की आय और इसकी मांग की क्रॉस-मूल्य लोच (cross-price elasticity) की गणना कीजिए।

(ii) आपके द्वारा गणना की गई दोनों लोच (elasticities) की आर्थिक व्याख्या दीजिए।

(iii) चिकन की कीमत में 10 प्रतिशत की वृद्धि होने पर मछली की मांग में कितने प्रतिशत परिवर्तन होगा?

(ख) क्या फलन $f(x,y)=\sqrt{xy}$ समरूप है निर्धारित कीजिए। यदि हाँ, तो कितनी डिग्री तक समरूप है?

5. A Japanese firm produces cars (x) and bikes (y). The profit function is given by :

$$\pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$$

(a) What levels of production of cars and bikes will make the profit function stationary?

(b) Test the 2nd order condition for maximisation of profits. Evaluate the maximum profit. (4,6)

एक जापानी फर्म (x) कार और (y) बाइक बनाती है। लाभ फलन निम्नानुसार है :

$$\pi = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18$$

(क) कारों और बाइकों का किस स्तर पर उत्पादन हों कि लाभ फलन स्थिर (stationary) हो जाए?

(ख) लाभ को अधिकतम करने के लिए द्वितीय क्रम की स्थिति (2nd order condition) का परीक्षण कीजिए। अधिकतम लाभ का मूल्यांकन कीजिए।